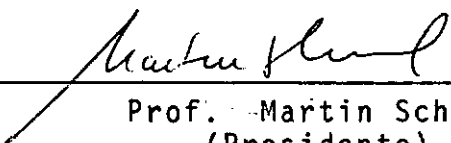


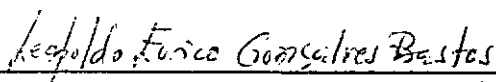
CAMADA LIMITE DE TEMPERATURA COM GRADIENTE DE
PRESSÃO ADVERSO

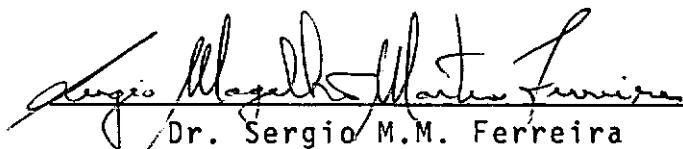
Márcio Valério Oliveira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OB-
TENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:


Prof. Martin Schmal
(Presidente)


Prof. Leopoldo E.G. Bastos


Dr. Sergio M.M. Ferreira

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 1976

Para

Lucia

Eduardo e Isabel
nesta ordem.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho deve ao permanente apoio e colaboração do Prof. MARTIN SCHMAL a sua produção. Mais que um agradecimento especial é aqui prestado um sincero reconhecimento a sua engenhosidade, talento e intuição que nos permitiram desenvolver este simples e singular trabalho.

São feitos agradecimentos ao Programa de Engenharia Mecânica da COPPE através de seus coordenadores, professores e colegas pelo interesse e estímulo. A CRUZEIRO, pelo apoio que nos possibilitaram a realização do curso e deste trabalho.

Agradecemos, por fim, aos familiares a compreensão e paciência que tiveram para conosco durante todo este tempo e à BIA pelo excelente trabalho de datilografia.

RESUMO

A equação da energia da camada limite de Prandtl é resolvida pelo método integral com a utilização de um perfil de velocidades biparamétrico, polinomial e de grau variável sugerido por Geropp e um perfil de temperatura baseado no perfil proposto por Van Driest e corrigido para as considerações de existência de gradientes de pressão.

A camada limite compressível laminar em presença de gradiente de pressão adverso é analisada utilizando as equações integrais da quantidade de movimento e da energia térmica.

Um método para o cálculo da camada limite em função do número de Mach, temperatura uniforme da parede e determinada distribuição de sucção é aqui desenvolvido.

Os resultados obtidos neste trabalho estão de acordo com as soluções exatas existentes ou soluções aproximadas precisas que utilizam uma diferente formulação da solução dos problemas de transferência de calor e mostram que a solução da equação da energia com a utilização de um parâmetro de correção para os efeitos de gradiente de pressão e temperatura constituem um meio eficiente e de grande simplicidade matemática para a resolução destes problemas.

ABSTRACT

The Prandtl's boundary layer energy equation has been solved by integral methods using a polynomial biparametric velocity profile with variable exponent as suggested by Geropp and a temperature profile presented by Van Driest which is modified to consider the presence of the pressure gradient.

The compressible laminar boundary layer in an adverse pressure gradient is analyzed on the basis of the momentum and thermal integral equations.

A method of calculating the boundary layer as function of the Mach number, uniform wall temperature and finite suction distribution is developed.

The results obtained agree with the available exact solutions and the accurate approximate methods using different approach to solve the heat transfer problem and show that the solution of the thermal energy equation with the parametric correction of the pressure and temperature gradient are a mathematically simple and fast way to solve that problem.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
CAPÍTULO I - Introdução	1
I.1 Definição do Problema.....	1
I.2 Caracterização do Fluido	5
I.3 Geometria da Interface	7
I.4 Modelo Físico	9
I.5 O Campo de Temperaturas	11
I.6 Revisão Bibliográfica	12
 CAPÍTULO II - Formulação Analítica	17
II.1 As Equações de Navier-Stokes	17
II.2 As Equações de Prandtl	18
II.3 Condições de Contorno	20
II.4 Condição de Compatibilidade na Parede ...	20
II.5 Condição de Sucção	27
II.6 Equações Integrais	28
 CAPÍTULO III - Perfil de Velocidades	42
III.1 Determinação do Perfil	42
III.2 Coeficientes do Perfil de Velocidades....	45
III.3 Coeficiente de Arraste e Dissipação	46
III.4 Parâmetros do Perfil de Velocidades	48
 CAPÍTULO IV - Perfil de Temperaturas	51
IV.1 Determinação do Perfil	51
IV.2 Coeficientes e Parâmetros do Perfil	52
 CAPÍTULO V - Velocidade e Temperatura do Escoamento Externo .	54

V.1	Velocidade no Escoamento Externo	54
V.2	Temperatura no Escoamento Externo	55
CAPÍTULO VI	- Determinação das Grandezas	57
VI.1	Coeficientes e parâmetros do Escoamento..	57
VI.2	Transferência de calor e número de Nusselt.	67
CAPÍTULO VII	- Solução do Sistema de Equações	70
VII.1	Sistema de Equações	70
VII.2	Método de Solução	74
CAPÍTULO VIII	- Método Computacional	78
VIII.1	Funções para Iteração	78
VIII.2	Valores Iniciais	83
VIII.3	Condição Final	84
VIII.4	Processo de Iteração	85
CAPÍTULO IX	- Conclusões	88
IX.1	Resultados e Discussão	88
IX.2	Conclusões e Sugestões	91
BIBLIOGRAFIA	99
NOMENCLATURA	102
APÊNDICES		
I	- Perfil de Temperatura, de Velocidade e seus Coeficientes	109
II	- Determinação dos Coeficientes de Arraste e Dis_ sipação	113
III	- Solução das Equações Diferenciais	116

IV - Determinação das Equações Integrais	119
V - Simbologia para Codificação	123

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - Definição do Problema.

Na resolução de problemas que envolvem transferência de calor é fundamental a consideração da propriedade energia que é utilizada na Mecânica e na Termodinâmica para auxiliar a especificação do estado de um sistema. Como sabemos, a transferência de energia através dos contornos de um sistema termodinâmico é feita em forma de calor ou de trabalho.

A transferência de calor é a expressão usada para indicar a transferência de energia devido a uma diferença de temperatura. Define-se taxa de transferência de calor como a energia térmica transferida na unidade de tempo e fluxo de calor com a taxa de transferência de calor por unidade de área. O cálculo das taxas de transferência de calor locais requer o conhecimento da distribuição de temperatura local que provê justamente aquele potencial necessário à transferência de calor.

A forma mais comum com que se apresentam os problemas de transferência de calor é aquela em que a transferência de energia se faz através de uma superfície. A interface que forma a superfície pode vir a tomar as mais diversas formas sendo as mais comuns as interfaces entre um sólido e um líquido ou um sólido e um gás. No caso de interface sólido-sólido temos resistências de contato

que afetam a transferência de calor entre os 2 sólidos. É de grande interesse a interface entre um líquido e um gás no caso de comportamento bifásico como as associadas com evaporação, ebulição e cavitação.

Na maioria das vezes a análise da transferência de calor através de uma interface deve considerar os três métodos de transferência de calor, a saber: radiação, condução e convecção, pois em geral, a temperatura de uma superfície e os gradientes de temperatura da interface são controlados pelos efeitos combinados dos 3 modos de transferência de energia, a saber: radiação, condução e convecção térmica. No presente trabalho, os efeitos devidos à radiação térmica não são considerados.

Como sendo o ar o fluido do meio circundante, os modos condutivo e convectivo de transferência de calor serão considerados em série e são estes dois modos a forma convectiva de calor. Isto porque no caso em questão, como em grande parte das situações, a velocidade do fluido relativa à superfície da interface é zero. Desta maneira, a condução molecular na interface deve prover o mecanismo de transferência de energia para o fluido. Após a condução desta energia para longe da superfície sólida, o movimento convectivo do fluido provê um segundo mecanismo para a transferência de energia.

Como sabemos, o movimento do fluido sobre uma superfície depende da geometria desta superfície, das propriedades do fluido e da velocidade do escoamento. É devido à geometria particular da superfície que gradientes de pressão são originários e vão afetar diretamente a velocidade de escoamento do fluido.

No presente trabalho nos restringiremos à transferência de calor em uma superfície sob condições permanentes, isto é, em que o perfil de temperaturas não será função do tempo. Será considerada apenas a convecção forçada, sendo o movimento do fluido causado por uma fonte externa.

Deve ser assinalado que a consideração de um sistema termodinamicamente em equilíbrio permite definir propriedades como temperatura, pressão, entalpia. A consideração da transferência de calor requer um gradiente de temperatura para prover o necessário potencial. O que permite aplicar os conceitos de equilíbrio termodinâmico a processos que envolvem taxas de não equilíbrio como transferência de calor é o conceito de equilíbrio termodinâmico local. Para tal, teremos que considerar a matéria como um continuum em que temos um grande número de diferentes sub-sistemas compondo um sistema finito que pode ou não estar em equilíbrio termodinâmico. Todas as propriedades termodinâmicas são definidas em cada ponto (sub-sistema) dentro de um sistema finito em cada instante de tempo. Cada sub-sistema é tratado como um sistema em equilíbrio termodinâmico. Embora cada sub-sistema deva ser bastante pequeno para ser aproximado por um sistema em equilíbrio, deve ser bastante grande para ser descrito com precisão por conceitos termodinâmicos macroscópicos.

Na maioria dos casos estes conceitos são apropriados devendo ser feita uma análise mais detalhada no caso em que temos a presença de ondas de choque, casos em que o processo se caracteriza por ter o seu tempo igual ao tempo de relaxação (tempo necessário para o sistema readquirir equilíbrio após súbita mudança em

uma de suas propriedades). No presente trabalho os modelos de continuum da matéria e equilíbrio termodinâmico local são considerados. Ele consiste fundamentalmente na solução da equação da energia com a aplicação dos métodos aproximados. Aqui, além das equações integrais da quantidade de movimento e de energia mecânica, na sua forma mais geral para os fluídos compressíveis, será utilizada a equação integral de energia térmica e a consideração dos perfis de velocidade e de temperaturas que melhor parecem traduzir os efeitos dos gradientes de pressão e de temperatura.

A pesquisa de literatura existente, conforme será visto adiante (1.6) nos levaram a verificar que, embora extensa, a utilização dos métodos integrais na solução das equações do movimento e da energia, sua aplicação aos casos em que estão presentes gradientes de pressão adversos são muito poucos, como são poucos os casos em que se considera a transferência de energia na presença destes gradientes acrescido das variações de propriedades do fluído em estudo. Isto porque as dificuldades que surgem, mesmo se tratando de métodos aproximados, são muito grandes e conduzem, para a sua solução, a simplificações que chegam a descaracterizar o problema a ser resolvido.

A utilização dos métodos integrais, como feita neste trabalho, bem como de perfis de velocidade e de temperaturas convenientes, permite reduzir estas simplificações a um mínimo. Devemos assinalar, por fim, que no caso de fluídos compressíveis, os efeitos de aquecimento termodinâmico devido ao escoamento do fluído, devem ser observados. Para escoamentos transônicos ou supersônicos o fenômeno do aparecimento de ondas de choque vão influenciar a ca

mada limite com efeitos também no escoamento livre. No presente trabalho estes efeitos não foram considerados, limitando-se ao escoamento de baixa velocidade. Nestes, para pequenos valores do número de Mach, o escoamento de gases em um corpo isolado apresenta transferência de calor desprezível. Isto se deve ao fato do trabalho de cisalhamento viscoso ser pequeno. Já para maiores números de Mach, este efeito é importante e a análise do comportamento da camada limite deve considerar não apenas as equações da quantidade de movimento e da energia mecânica [1] mas também a equação de energia térmica.

I.2 - Caracterização do Fluido.

É de fundamental importância para a correta caracterização do problema, a especificação do tipo de fluido utilizado. Isto porque o comportamento do escoamento é diretamente influenciado pelas características e propriedades do fluido utilizado.

Entre estas características, sobressai a que informa sobre o comportamento do fluido real quando se desloca em determinada direção, a saber, a sua natureza reológica, definida pela sua viscosidade. O primeiro modelo a descrever o comportamento reológico de um fluido viscoso foi aquele proposto por Newton:

As tensões normais e tangenciais experimentadas por um elemento de fluido são diretamente proporcionais às taxas de deformação dos mesmos.

São os chamados fluidos newtonianos e neles é possível estabelecer a relação entre a tensão de cisalhamento segundo uma

determinada direção e o gradiente de velocidades perpendicular a esta direção, a saber:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Aqui, τ_{yx} é a tensão de cisalhamento segundo o eixo dos x , μ a viscosidade dinâmica e u a velocidade do fluido na direção x . A viscosidade é função da temperatura e numerosas são as relações propostas para descrever o seu comportamento com as variações de temperatura.

Um outro modelo é o chamado "Power-Law". Aplica-se nos casos dos chamados fluidos não-newtonianos, nos quais não se verifica a proporcionalidade entre τ_{yx} e $-\frac{\partial u}{\partial y}$.

Como exemplo temos a equação de Ostwald-de Waele,[3] bi-paramétrica, conforme abaixo:

$$\tau_{yx} = -m \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

No caso de $n = 1$ ela se reduz ao caso do fluido newtoniano com $m = \mu$.

Valores de n inferiores à unidade caracterizam o comportamento pseudoplástico e valores superiores a 1 o comportamento dilatante. Experiências demonstraram que todos os gases se comportam como fluidos newtonianos e também líquidos homogêneos não poliméricos. E que a viscosidade dos gases de baixa densidade aumenta com o aumento da temperatura e a viscosidade dos líquidos diminui com o aumento da temperatura.

I.3 - Geometria da Interface.

Considera-se o escoamento de um fluido newtoniano externamente a um cilindro de seção circular. O fluido é considerado compressível e se encontra a uma determinada temperatura.

Este cilindro tem sua superfície externa a uma temperatura constante.

O estudo do escoamento externo a um cilindro circular é um problema clássico, abordado inicialmente por Blasius em 1908, sendo posteriormente estudado por Hiemenz e Goertler. Uma apresentação interessante destes estudos e da bibliografia citada é feita no trabalho de FIGUEIREDO [1], que aborda o escoamento para fluido incompressível, não newtoniano. Com o intuito de facilitar o acompanhamento deste trabalho, um breve resumo é aqui apresentado.

Na consideração do escoamento externo a um cilindro circular, deve ser observado que a influência do número de Reynolds é bastante grande. Baixos números de Reynolds acarretam efeitos viscosos até grandes distâncias da parede do cilindro. No caso de altos valores do número de Reynolds existe a formação de vórtices na superfície do cilindro a uma determinada distância do ponto de estagnação frontal.

Na faixa $10^2 < Re < 10^5$ o escoamento é laminar até este ponto que permanece estacionário. Para $Re \gg 10^5$ o escoamento se torna completamente turbulento.

É de grande interesse a determinação do ponto em que se inicia a formação dos vórtices, pois ele caracteriza o ponto de

separação do escoamento laminar da parede. Sua determinação experimental e analítica foi feita por Hiemenz, em 1911, para o cilindro circular, a partir de uma distribuição de pressão obtida experimentalmente.

Em princípio, esta distribuição de pressões não é a do escoamento potencial. O escoamento no caso de uma superfície cilíndrica apresenta características especiais como sejam, o seu retardamento na parede devido ao atrito, seu impulsionamento pelas camadas mais externas devido ao efeito de viscosidade e seu retardamento por gradientes de pressão adverso.

As considerações do atrito e da viscosidade são feitas apenas em uma estreita faixa próxima à parede. Deve ser observado que aí temos igualmente aplicadas as forças de inércia e de pressão.

No caso de elevados valores do número de Reynolds podemos aplicar a teoria da camada limite ao escoamento.

Quando aplicamos a teoria potencial ao escoamento externo a um cilindro circular obtemos como ponto de pressão mínima, o ponto correspondente a $\theta^0 = 90^0$, isto é, a partir deste ponto o escoamento passa a ter um gradiente de pressão adverso. Este fato não é confirmado pela experiência com fluidos reais em escoamento permanente, quando são considerados diversos valores do número de Reynolds e de raios do cilindro [7]. Observamos já a partir de $\theta^0 = 70^0$ medido a partir do ponto de estagnação central um valor mínimo para a pressão. Segue-se um aumento de pressão e entre $\theta^0 = 80^0$ e $\theta^0 = 120^0$, há uma estabilização quando permanece constante até $\theta^0 = 180^0$.

A variação da localização do ponto de pressão mínima é mais acentuada na faixa de número de Reynolds críticos, como seja, $10^5 < Re < 2,5 \times 10^7$ [7], pois aqui há uma grande instabilidade no escoamento, o que é característico da transição do escoamento laminar para turbulento.

O trabalho experimental de HIEMENZ, GOERTLER, GEROPP [5], [19], mostrou haver separação para $\theta^0 \approx 80^\circ$, enquanto que a solução de Blasius utilizando a distribuição de pressão da teoria potencial apresenta o valor $\theta_s \approx 108.8^\circ$ [12], medidas a partir do ponto de estagnação frontal.

Outro ponto a ser considerado no exame da utilização de uma distribuição de pressões da experiência, é que a teoria potencial não considera que há separação no escoamento.

I.4 - Modelo Físico.

Considera-se o escoamento de um fluido compressível externamente a um cilindro circular, escoamento este perpendicular ao eixo do cilindro.

O problema será tratado a duas dimensões e as trocas de calor entre o fluido e a parede do cilindro são objeto de investigação sendo pesquisada a influência da sucção no comportamento do perfil de velocidades e do campo de temperaturas.

Para a abordagem do problema no método integral e utilizando um perfil bi-paramétrico para o perfil de velocidades é necessário considerar a parede do cilindro à temperatura constante

visto que a determinação dos parâmetros do perfil de velocidades exigem que a condição de compatibilidade na parede seja utilizada, conforme veremos no desenvolvimento da teoria.

O fluido considerado é um fluido newtoniano e a sucção aplicada na superfície do cilindro não afeta o escoamento externo.

Despreza-se a ação do campo gravitacional, pois temos:

$$F_r = \frac{U_{\infty}^2}{g \cdot R_c} > 2.000$$

Segundo SCHMAL [13], para $F_r < 1$, as forças de inércia podem ser desprezadas e entre 1 e 2000 devemos considerar as forças de inércia e as gravitacionais.

Neste trabalho as forças presentes são as de inércia, de pressão e viscosas e admitidas atuantes conforme a teoria da cama da limite, a saber:

1. Efeitos viscosos limitados a uma estreita faixa adjacente à interface.
2. A distribuição de pressões é a do escoamento externo.
3. As taxas de transporte normais ao escoamento são muito mais intensas do que as taxas tangenciais.

I.5 - O Campo de Temperaturas.

O objeto do presente trabalho é a determinação do campo de temperaturas do escoamento através da equação da energia total, função dos perfis de temperatura dentro da camada limite e do per-

fil de temperatura externa. Os efeitos de dissipação viscosa não serão considerados e as variações decorrentes da presença de fortes gradientes de pressão adversas serão levadas em consideração no perfil de temperaturas dentro da camada limite.

Os efeitos devido à dissipação viscosa e ao trabalho realizado contra a compressão do fluido compressível condutor de calor são desprezíveis quando se verifica a relação abaixo [20]:

$$Pr_m \times Ec_m \ll 1$$

onde Pr_m é o número de Prandtl médio do escoamento e definido por

$$Pr_m = \frac{C_{pm} \times \mu_m}{K_{cm}}$$

e Ec_m é o número de Eckert médio definido por

$$Ec_m = \frac{U_m^2}{C_{pm} \times (T_0 - T_m)}$$

I.6 - Revisão Bibliográfica.

Apesar do grande número de trabalhos publicados na área da mecânica dos fluidos com a utilização da teoria da camada limite, são relativamente poucos os trabalhos que abrangem o estudo do comportamento dos fluidos quando em presença de gradientes de pressão adversos ou gradientes de temperatura. Entre estes traba-

lhos podemos destacar o de SPALDING [11], que analisa e classifica 15 métodos existentes para predição do coeficiente de transferência de calor em escoamento laminar. Estes métodos são, então, aplicados ao cálculo da distribuição do número de Nusselt em torno de um cilindro circular.

É interessante ressaltar que todos os métodos analisados se mostram de duvidosa precisão próximo ao ponto de separação que foi estimado se situar entre $x/L = 0.6$ a 0.7 , em que x é a distância medida ao longo da parede do cilindro na direção do escoamento e L é o diâmetro do cilindro.

O trabalho de PERKINS e LEPPERT [16] analisa a transferência de calor em uma camada limite laminar pelo método integral com um perfil de velocidades de 4.^a ordem e um perfil de temperatura de 3.^a ordem. Considera na equação da energia a espessura da camada limite térmica menor que a espessura da camada limite de velocidade o que restringe a análise para número de Prandtl maior ou igual à unidade. E admite que para gases, o erro será pequeno visto que neste caso teremos o número de Prandtl Pr igual a 0.72 .

Dentre os trabalhos experimentais analisados podemos citar o de FAND [14], onde são apresentados resultados para o caso de transferência de calor por convecção forçada de um cilindro para a água em escoamento perpendicular à direção do seu eixo na faixa do número de Reynolds de 10.000 a 100.000 . Os resultados obtidos estão próximos dos propostos por Mc ADAMS [14]. E o de DOUGLAS e CHURCHILL [14], que analisaram a transferência de calor de cilindros para o ar em escoamento perpendicular e propuseram uma correlação da forma:

$$(Nu)f = a(Re)f^{0.50} + b(Re)f$$

Nesta correlação, \underline{a} e \underline{b} são consideradas proporcionais $\bar{a} (Pr)^{\underline{m}}$, com \underline{m} tendo valor entre 0,3 e 0,4.

Os efeitos da variação da viscosidade serão considerados, no extenso trabalho de POOTS e RAGGETT [20] que, em virtude das dificuldades computacionais apresentadas pela consideração da variação das propriedades físicas, considera soluções similares das equações da quantidade de movimento e da energia térmica.

A consideração da transferência de calor de superfícies à temperatura não uniforme já havia sido feita por SPALDING [10] quando da análise de estudo anterior de LIGHTHILL [10], que considera o caso em que a camada limite térmica é muito mais fina que a camada limite de velocidade e pode ser considerada como estando totalmente dentro de uma região de perfil de velocidade linear.

Para o caso de fluido compressível MERK [17] analisa e desenvolve o chamado "wedge method" proposto por MEKSYN [17]. Na aplicação do cálculo da transferência de calor local a um perfil elíptico considera o perfil de velocidade da extremidade da camada limite dado pela teoria potencial, que não considera o efeito da onda que se forma atrás do cilindro e tem importante efeito na velocidade da extremidade da camada limite. Por isto, para o caso do cilindro circular, utiliza a fórmula advinda da experiência, dada por

$$\frac{U_{\delta}}{U_{\infty}} = U_1 \cdot \left(\frac{x}{L}\right) - U_3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 - U_5 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^5$$

em que L é o diâmetro do cilindro. Utiliza para as constantes U_1 ,

U_2 e U_3 os valores dados por HIEMENZ [6], a saber:

$$U_1 = 3.631, \quad U_3 = 2.171, \quad U_5 = 1.514$$

para $Re = 18.500$, ou os valores dados por SCHMIDT e WENNER [17]

$$U_1 = 3.631, \quad U_3 = 3.275, \quad U_5 = 0.168$$

para $Re = 170.000$.

Os cálculos feitos para os três perfis apresentam resultados precisos próximos ao ponto de estagnação, enquanto que próximo ao ponto de separação o método não é confiável.

Os resultados obtidos para o perfil dado pela teoria potencial indicam que a separação ocorre para $\theta^0 = 95.2^0$. A expansão em série, devido a BLASIUS conduz a $\theta^0 = 100^0$. As medidas devido a SCHMIDT e WENNER dão $\theta^0 = 72.4^0$ e o valor dado pela experiência é de aproximadamente 80^0 .

Entre os trabalhos que analisam os efeitos da sucção destacamos o de KOH e HARTNETT [15], que incluem os casos de parede isotérmica e de temperatura variável para o escoamento laminar de fluido incompressível. E o trabalho de MORDUCHOW e REYLE [18], que analisam a camada limite laminar compressível em gradiente de pressão com sucção, utilizando as equações integrais da quantidade de movimento e da energia térmica em conexão com um perfil de temperatura do sétimo grau e dois perfis de velocidade, um do sétimo grau (para o ponto de separação) e outro do sexto grau. Considera também, que as espessuras das camadas limite térmicas e da quantidade de movimento são idênticas. Na solução das equações, há a necessidade de considerar o perfil de temperaturas da extre-

midade da camada limite e admitir um escoamento isotrópico para a extremidade da camada limite. Os coeficientes de calor específico e o número de Prandtl são considerados constante e o de viscosidade é considerado ser proporcional à temperatura absoluta pela relação proposta por CHAPMAN e RUBESIN [18]

$$\frac{\mu}{\mu_{\infty}} = K_p \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)$$

com K_p escolhido de modo a atender à conhecida fórmula de Sutherland. Faz uso da variável t de Dorodnitsyn definida por

$$y = \int_0^t \left(\frac{T}{T_{\delta}} \right) dt$$

para obter as equações integrais da quantidade de movimento e da energia térmica. Seu método consiste igualmente em transformar estas equações integrais em duas equações diferenciais ordinárias. Considera, finalmente, sucção homogênea ($v_0 = \text{constante}$) e o caso em que $v_0 \approx x^{-1/2}$.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO ANALÍTICA

II.1 - As Equações de Navier-Stokes

Quando são considerados fluidos reais em que os efeitos viscosos se apresentam como relevantes, o conjunto de equações matemáticas que parece melhor traduzir o comportamento destes fluidos são as Equações de Navier-Stokes.

Consideraremos, à maneira de STEWARTSON [2], estas equações de forma axiomática, isto é, como um conjunto consistente de equações diferenciais e relações constitutivas cuja importância na dinâmica dos fluidos - se justifica pela boa concordância entre suas consequências e a experiência.

As simplificações para escoamento permanente de um fluido newtoniano e bidimensional nos conduzem à forma abaixo, onde são consideradas coordenadas cartesianas (x,y) , com as correspondentes componentes da velocidade do fluido (u,v) . O fluido possui viscosidade μ , pressão p , densidade ρ e temperatura absoluta T , que são considerados função de x e y apenas pelas aproximações feitas de que o escoamento é bi-dimensional e permanente.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (2.1.1)$$

Conservação de massa ou continuidade.

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \rho X + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) -$$

$$- \frac{2}{3} \Delta \frac{\partial \mu}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.1.2)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \Delta \mu \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \rho Y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) -$$

$$- \frac{2}{3} \Delta \frac{\partial \mu}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.1.3)$$

Equações da conservação da
quantidade de movimento.

$$\text{com } \Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

e X e Y são forças externas por unidade de massa do fluido.

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} (C_p T) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} (C_p T) = u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_c \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_c \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \mu \Phi \quad (2.1.4)$$

Equação da conservação da
energia.

$$\text{onde } \Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \quad (2.1.5)$$

II.2 - As Equações de Prandtl.

Importante simplificação que reduz, em grande parte, as dificuldades impostas pelas equações diferenciais elípticas conhe-

cidas como Equações de Navier-Stokes, é aquela feita por Prandtl no início deste século, quando no clássico trabalho apresentado em 1904 [4] estabelece as equações da camada limite que considera os efeitos viscosos como relevantes em uma pequena região adjacente à superfície do corpo em torno do qual o fluido está se deslocando. As considerações daí resultantes transformam as equações diferenciais elípticas em equações diferenciais parabólicas, mais simples que as anteriores porém ainda de dificuldade matemática enorme necessitando diversos métodos e processos que as transformem de equações diferenciais de derivados parciais em equações diferenciais ordinárias, de manuseio mais simples.

Um destes métodos, e que aqui será empregado, consiste precisamente em considerar as equações de Prandtl na forma Integral conforme proposto por Von KARMAN e POHLHAUSEN [12].

A definição de certas integrais permitirá transformar a equação integral numa equação diferencial ordinária e a resolução dos diferentes parâmetros que são importantes na consideração do escoamento.

As equações de Prandtl para a camada limite serão por nós consideradas em forma simplificada, sendo desprezados os efeitos de dissipação viscosa e as forças do corpo.

Estas equações são conforme abaixo :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.2.2)$$

$$p(x,y) = p(x) \quad (2.2.3)$$

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(c_p T + \frac{1}{2} u^2 \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left(c_p T + \frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[u \frac{\partial}{\partial y} \left(c_p T + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] \quad (2.2.4)$$

II.3 - Condições de Contorno.

$$y = 0 \quad u = u_0 = 0 \quad v = v_0 = \text{Cte} \quad T = T_0 \quad \rho = \rho_0 \quad (2.3.1)$$

$$y = \delta \quad u \rightarrow U_\delta(x) \quad v = v(x) \quad T = T_\delta(x) \quad \rho = \rho_\delta(x) \quad (2.3.2)$$

II.4 - Condição de Compatibilidade na Parede.

A equação de quantidade de movimento aplicada à condição de contorno $y = 0$ nos dá:

$$\rho_0 \left[u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} = \rho_\delta U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (2.4.1)$$

ou, considerando $u_0 \neq 0$ e $\frac{u_0}{U_\delta} = \text{const.}$, obtemos:

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \left[- \left(\frac{u_0}{U_\delta} \right)^2 + \frac{\rho_\delta}{\rho_0} \right] U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (2.4.2)$$

No caso de um fluido "power-law" com $\tau = m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n$ tem-se:

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \left[- \left(\frac{u_0}{U_\delta} \right)^2 + \frac{\rho_\delta}{\rho_0} \right] U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial m}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n + n m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right] \quad (2.4.3)$$

No caso de fluido newtoniano temos $m = \mu$, $n = 1$

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \left[-\left(\frac{u_0}{U_\delta}\right)^2 + \frac{\rho_\delta}{\rho_0} \right] U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right] \quad (2.4.4)$$

Para o caso de fluido incompressível e isotérmico temos (power-law)

$$\rho_0 = \rho_\delta = \rho, \quad \frac{\partial m}{\partial y} \approx 0$$

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \left[-\left(\frac{u_0}{U_\delta}\right)^2 + 1 \right] U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{m}{\rho} \cdot \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right) \quad (2.4.5)$$

No caso de fluido newtoniano incompressível e isotérmico

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \left[-\left(\frac{u_0}{U_\delta}\right)^2 + 1 \right] U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right) \quad (2.4.6)$$

No caso de fluido newtoniano, compressível e isotérmico temos:

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \left[-\left(\frac{u_0}{U_\delta}\right)^2 + \frac{\rho_\delta}{\rho_0} \right] U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{1}{\rho_0} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) \quad (2.4.7)$$

Se $\mu = f(T)$ teremos

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \left[-\left(\frac{u_0}{U_\delta}\right)^2 + \frac{\rho_\delta}{\rho_0} \right] U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right] \quad (2.4.4)$$

Neste caso, do escoamento compressível, a viscosidade varia com a temperatura, devendo ser considerado o termo

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

Considerando a relação entre a viscosidade e a Temperatura da forma

$$\frac{\mu}{\mu_{\delta}} = \left(\frac{T}{T_{\delta}} \right)^w \quad (2.4.8)$$

obtem-se:

$$\frac{1}{\mu_{\delta}} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} = w \cdot \left(\frac{T}{T_{\delta}} \right)^{w-1} \cdot \frac{\partial \frac{T}{T_{\delta}}}{\partial y} \quad (2.4.9)$$

ou

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = w \frac{\mu_{\delta}}{\mu} \cdot \left(\frac{T}{T_{\delta}} \right)^{w-1} \cdot \frac{\partial \frac{T}{T_{\delta}}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \mu \quad (2.4.10)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = w \cdot \frac{\mu_{\delta}}{\mu} \cdot \left(\frac{T}{T_{\delta}} \right)^{w-1} \cdot \frac{\partial \frac{T}{T_{\delta}}}{\frac{u_{\delta}}{\mu} \cdot \frac{\partial \frac{u}{u_{\delta}}}{\partial y}} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \mu \quad (2.4.11)$$

donde, com a consideração do perfil $\frac{T}{T_{\delta}}$ (Apêndice I).

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = w \left(\frac{T}{T_{\delta}} \right)^{w-1} \cdot \left[(B+Kx) + 2(C-Kx) \frac{u}{u_{\delta}} \right] \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \cdot \frac{1}{u_{\delta}} \quad (2.4.12)$$

A expressão é então assim escrita:

$$\begin{aligned} v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \left[- \left(\frac{u_0}{u_{\delta}} \right)^2 + \frac{\rho_{\delta}}{\rho_0} \right] u_{\delta} \frac{du_{\delta}}{dx} = \frac{1}{\rho_0} \left[w \cdot \frac{1}{u_{\delta}} \cdot \frac{T_{\delta}}{T} \left[(B+Kx) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(C+Kx) \frac{u}{u_{\delta}} \right] \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right] \quad (2.4.13) \end{aligned}$$

ou seja, aplicando-a ao ponto $y = 0$, $u_0 = 0$, $v \Big|_{y=0} = -v_0$, $T = T_0$

$$-v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\rho_\delta}{\rho_0} U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{1}{\rho_0} \left[w \cdot \frac{1}{U_\delta} \cdot \frac{T_\delta}{T_0} (B + Kx) \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \Big|_{y=0} + \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right] \quad (2.4.14)$$

Esta expressão traduz a condição de compatibilidade na parede para o caso de um fluido com propriedades físicas variáveis.

Aplicada ao caso em μ é constante, isto é, não varia com a temperatura, teremos

$$\mu = \mu_\delta \quad \therefore \quad w = 0 \quad (2.4.15)$$

e a equação de compatibilidade se reduz ao caso incompressível.

$$-v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\rho_\delta}{\rho_0} U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{\mu_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \quad (2.4.16)$$

A condição de compatibilidade será utilizada para o cálculo do coeficiente A_3 do perfil de velocidades (APÊNDICE I).

Será conveniente analisar a condição de compatibilidade para verificar o comportamento do perfil de velocidades na interface sólido-fluido.

A partir da equação geral para o fluido newtoniano compressível

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \left[- \left(\frac{u_0}{U_\delta} \right)^2 + \frac{\rho_\delta}{\rho_0} \right] U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right] \quad (2.4.4)$$

a consideração de fluido incompressível e isotérmico ($T = \text{Const.}$) nos dá as condições

$$y=0, \quad \rho=\rho_0, \quad \mu=\mu_0=\text{Const.}, \quad u_0=0, \quad v_0=-v_0 \quad (2.4.17)$$

donde a equação

$$-v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\rho_\delta}{\rho_0} U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{\mu_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} \quad (2.4.18)$$

Uma vez que $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$ é sempre maior que zero ou igual a zero no perfil de separação, podemos prever o comportamento do perfil de velocidades. No caso de escoamento com sucção ($v_0 < 0$) e sabendo que o perfil é assintótico em relação ao escoamento externo $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=\delta} < 0$ observa-se que:

1º - No escoamento acelerado $\frac{dU_\delta}{dx} > 0$ temos maiores $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$ e maior arraste

2º - No escoamento retardado $\frac{dU_\delta}{dx} < 0$ temos maiores $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0}$ e a curvatura na parede diminui.

A consideração da equação da compatibilidade na forma geral para fluido newtoniano compressível nos conduz a analisar a equação

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \left[-\left(\frac{u_0}{U_\delta} \right)^2 + \frac{\rho_\delta}{\rho_0} \right] U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right] \quad (2.4.4)$$

Para $y=0 \longrightarrow u = u_0 = 0$

$v = -v_0 \neq 0$ (sucção)

$$-v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\rho_\delta}{\rho_0} \cdot U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right] \quad (2.4.19)$$

No caso em que a viscosidade molecular é constante, isto é, para os fluidos incompressíveis e sem transferência de calor, o termo

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial y} \right|_{y=0}$$

é nulo, e a equação se simplifica para o caso já analisado que estabelece na parede ($y=0$) a derivada segunda do perfil de velocidade com relação à distância y da parede proporcional ao gradiente de pressão $\frac{dp}{dx}$ ou ao gradiente de velocidade $\frac{dU_\delta}{dx}$ na direção do fluxo (caso em que $v_0 = 0$, sem sucção).

Quando o fluxo externo $U_\delta(x)$ é retardado, isto é, com $\frac{dU_\delta}{dx} < 0$, temos que $\frac{dp}{dx} > 0$, donde $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} > 0$ (caso que $v_0=0$, sem sucção), ou valores de $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} > 0$ menores (caso $v_0 = -v_0$) mas positivos.

Temos assim que a derivada segunda é positiva e ao aproximar-se de $y = \delta$ ela deve ser negativa (ordem n de $\frac{\partial^n u}{\partial y^n}$ é par) assim deverá ser zero em algum ponto entre $y = 0$ e $y = \delta$. A distância y da parede em que se localiza o ponto de inflexão depende da prévia história da camada limite.

Quando o fluxo externo é acelerado $\frac{\partial U_\delta}{\partial x} > 0$ temos que $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ e $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} < 0$ (caso que $v_0=0$ e $v_0=-v_0$) e assim $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ é negativo em todo intervalo $0 < y < \delta$.

Analisando o caso em que $\left. \frac{\partial \mu}{\partial y} \right|_{y=0} \neq 0$ podemos escrever a equação (2.4.19) como

$$\left[\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{y=0} = - \rho_0 v_0 \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} - \rho_\delta U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} - \left[\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (2.4.20)$$

Para gases e fluidos μ é função da temperatura T , sendo crescente nos gases para T crescente e decrescente nos líquidos pa-

ra T crescente.

Assim, para $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} > 0$ (parede fria), $\left. \frac{\partial \mu}{\partial y} \right|_{y=0} > 0$ para gases e seu comportamento é igual ao de $\frac{\partial u_\delta}{\partial x}$ para escoamento acelerado e, no caso de sucção ($v_0 = -v_0$), o perfil se torna mais concavo, com $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ mais negativo.

No caso de escoamento retardado $\frac{\partial u_\delta}{\partial x} < 0$ temos que o perfil de velocidade se torna menos concavo. As figuras 2-1 e 2-2 representam estes perfis.

II.5 - Condição de Sucção

II.5.1 - O número de Reynolds.

No desenvolvimento das equações integrais para a camada limite chega-se a um agrupamento adimensional denominado número de Reynolds para a espessura de perda de quantidade de movimento, definido para o caso de fluido não newtoniano [1] como:

$$Re_{\delta_2} = \frac{\rho_\delta}{m} \cdot U^{2-n} \cdot \delta_2^n \quad (2.5.1.1)$$

No caso de fluidos newtonianos ($n = 1$) este grupo adimensional é dado por

$$Re_{\delta_2} = \frac{\rho_\delta U_\delta \delta_2}{\mu_0} \quad (2.5.1.2)$$

II.5.2 - Parâmetro de Sucção.

É conveniente definir um parâmetro de sucção na forma [1]

$$\chi = -Re_{\delta_2} \frac{v_0}{U_\delta} \quad (2.5.2.1)$$

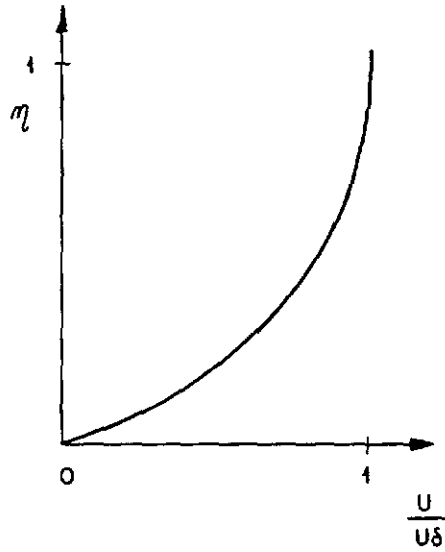


FIG. (2 -1) - ESCOAMENTO ACELERADO — $\frac{dU_\delta}{dx} > 0$

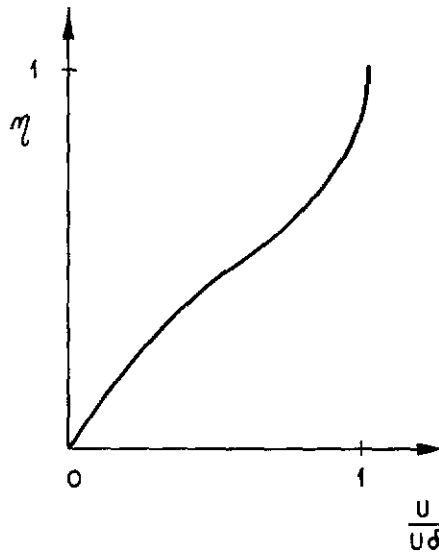


FIG. (2 -2) - ESCOAMENTO RETARDADO — $\frac{dU_\delta}{dx} < 0$

ou, pela definição de Re_{δ_2} ,

$$\chi = - \frac{\rho_{\delta} v_0 \delta_2}{\mu_0} = \psi_{\delta_2} \quad (2.5.2.2)$$

onde ψ_{δ_2} é o número de sucção.

II.6 - Equações Integrais.

Quando da consideração dos fluidos reais, a aplicação das Leis da Mecânica a um elemento infinitesimal de fluido nos conduz a um conjunto de equações conhecidas como Equações de Navier-Stokes, que são equações diferenciais de derivadas parciais. Estas equações são elípticas e não se tem soluções analíticas a não ser em casos especiais como no chamado Couette Flow, etc.

A consideração de que os efeitos da viscosidade são consideráveis apenas em uma estreita camada do fluido em movimento para o caso de escoamento com número de Reynolds elevado conduzem a formulação das Equações da Camada Limite (Prandtl) que são equações diferenciais de derivadas parciais parabólicas. Nestas equações os efeitos sobre uma partícula não são determinadas pela "história" anterior e as considerações que deverão ser feitas para compensar esta simplificação se traduzem num efeito de realimentação e constituem a teoria da camada limite de 2ª ordem.

Se bem que mais simples que as equações de Navier-Stokes, as equações de Prandtl apresentam também dificuldades consideráveis. Para sua solução diversos métodos foram propostos, sendo que uma extensa faixa destas soluções é creditada à chamada so

lução similar ou por similaridade. O seu objetivo é o de reduzir a equação diferencial parcial que rege o fenômeno analisado a uma equação diferencial ordinária que tem solução mais simples.

Os estudos das chamadas soluções similares mostraram que elas somente são possível quando a velocidade é uma potência da distância ao ponto inicial do escoamento.

Neste caso os perfis de velocidade são todos os similares e diferem apenas em escala um dos outros. Apenas escoamentos continuamente acelerados ou continuamente retardados têm solução similar, não podendo a mesma ocorrer um escoamento que apresente separação. Um outro tipo de solução para as equações diferenciais parciais da Camada Limite é a solução integral. Elas são soluções aproximadas que apresentam uma média das equações de quantidade de movimento e da energia para toda a espessura da camada limite. Traduzem uma condição integral para o equilíbrio de forças em uma seção de controle de comprimento dx e altura δ .

O método integral foi proposto por Von KARMAN e POHLHAUSEN [12], em 1921. O sistema de equações sugerido é composto pela equação da quantidade de movimento e pela condição de compatibilidade, que é a aplicação das condições da interface (sólido-fluido) à equação da quantidade de movimento. As variáveis são um parâmetro de forma para o perfil de velocidades e um parâmetro de espessura para a camada limite.

Com a integração parcial da equação de quantidade de movimento, WIEGHARDT [8], [19], em 1914, introduziu mais uma equação, a equação da energia mecânica, o que permitiu a utilização de mais um parâmetro de forma para o perfil de velocidade.

Wieghardt mostrou igualmente que estas duas equações integrais, a da quantidade de movimento e da energia mecânica pertencem a um sistema de infinitas equações que são deduzidas das equações da continuidade e da quantidade de movimento. A escolha destas equações é feita baseada em justificativas físicas e GEROPP [5], [19] demonstrou que as mesmas são de fato as mais importantes.

A integração parcial da equação da energia nos conduz à obtenção da Equação Integral da Energia.

A determinação destas equações integrais será feita de acordo com um método indicado por Pohlhausen e aplicado por Wieghardt que consiste em, partindo-se das equações diferenciais parciais da continuidade, da quantidade de movimento e da energia obter as equações diferenciais ordinárias pela multiplicação dessas equações por "funções peso", e definir certos grupos de integrais, obtendo um sistema de tantas equações quantas as condições em $y=0$ e $y = \delta$ satisfeitas pelos perfis de velocidade e de temperatura.

No caso de perfil hidrodinâmico, Wieghardt sugere utilizar, como "função peso", potências da velocidade. No caso do perfil de temperatura, serão utilizadas como "função peso" potências da entalpia.

Para o perfil hidrodinâmico, a utilização das potências de velocidade como feito por GEROPP [5] e SCHMAL [13] nos conduz a multiplicar a equação da continuidade por $\frac{U^{v+1}}{v+1}$ e a equação da quantidade de movimento por U^v e, considerando que

$$\frac{dp}{dx} = - \rho_\delta U_\delta \frac{dU}{dx} \quad (2.6.1)$$

deduzida a partir da equação de Bernouilli, e

$$\frac{1}{\rho_{\delta}} \cdot \frac{d\rho_{\delta}}{dx} = - \frac{1}{U_{\delta}} \frac{dU_{\delta}}{dx} \cdot M_{\delta}^2 \quad (2.6.2)$$

obtida da dinâmica dos gases, obtemos o sistema de equações diferenciais ordinárias de 1.^a ordem (APÊNDICE IV).

$$\frac{d}{dx}(fv) + fv \left(v+2 - \frac{g_v}{f_v} - M_{\delta}^2 \right) \frac{1}{U_{\delta}} \frac{dU_{\delta}}{dx} + e_v + h_v = 0 \quad (2.6.3)$$

com as seguintes definições para os parâmetros:

$$h_v = \frac{\rho_0 v_0}{\rho_{\delta} U_{\delta}} \left[\left(\frac{u_0}{U_{\delta}} \right)^{v+1} - 1 \right] \quad (2.6.4)$$

$$e_v = (v+1) \int_0^{\delta} \left(\frac{u}{U_{\delta}} \right)^v \frac{\partial}{\partial} \left(\frac{\tau}{\rho_{\delta} U_{\delta}^2} \right) dy \quad (2.6.5)$$

$$f_v = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_{\delta} U_{\delta}} \left(1 - \left(\frac{u}{U_{\delta}} \right)^{v+1} \right) dy \quad (2.6.6)$$

$$g_v = (v+1) \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_{\delta} U_{\delta}} \left(\frac{\rho_{\delta}}{\rho} \left(\frac{u}{U_{\delta}} \right)^{v-1} - 1 \right) dy \quad (2.6.7)$$

A equação (2.6.3) é a forma mais geral para o sistema de condições integrais para a camada limite laminar, estando sujeita às restrições impostas às relações (2.6.1) e (2.6.2).

A consideração de $v = 0$ e $v = 1$ nos dão equações com significado físico conhecido. Obtêm-se assim as equações a seguir:

$$v = 0$$

$$h_0 = \frac{\rho_0 v_0}{\rho_\delta U_\delta} \left(\frac{u_0}{U_\delta} - 1 \right) \quad (2.6.8)$$

$$e_0 = \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho_\delta U_\delta^2} \right) dy = - \frac{\tau_0}{\rho_\delta U_\delta^2} = - C_f / 2 \quad (2.6.9)$$

C_f = Coeficiente de arraste

$$f_0 = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta} \left(1 - \frac{u}{U_\delta} \right) dy = \delta_2 \quad (2.6.10)$$

δ_2 = Espessura de perda de momentum

$$g_0 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta} \right) dy = \delta_1 \quad (2.6.11)$$

δ_1 = espessura de perda de velocidade

$$\frac{d}{dx}(\delta_2) + \delta_2 \left[2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} - M_\delta^2 \right] \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} - \frac{C_f}{2} + \frac{\rho_0 v_0}{\rho_\delta U_\delta} \left(\frac{u_0}{U_\delta} - 1 \right) = 0 \quad (2.6.12)$$

$$v = 1$$

$$h_1 = \frac{\rho_0 v_0}{\rho_\delta U_\delta} \left[\left(\frac{u_0}{U_\delta} \right)^2 - 1 \right] \quad (2.6.13)$$

$$e_1 = 2 \int_0^\delta \frac{u}{U_\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho_\delta U_\delta^2} \right) dy = - 2 \frac{\left(U_0 \tau_0 + \int_0^{U_\delta} \tau \cdot du \right)}{\rho_\delta U_\delta^3} = - 2 \cdot C_D \quad (2.6.14)$$

C_D = coeficiente de dissipação

$$f_1 = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_{\delta} U_{\delta}} \left(1 - \left(\frac{u}{U_{\delta}} \right)^2 \right) dy = \delta_3 \quad (2.6.15)$$

δ_3 = espessura de perda de energia

$$g_1 = 2 \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_{\delta} U_{\delta}} \left[\frac{\rho_{\delta}}{\rho} - 1 \right] dy = 2\delta_4 \quad (2.6.16)$$

δ_4 = espessura de perda de massa específica

$$\frac{d}{dx}(\delta_3) + \delta_3 \left[3 - 2 \frac{\delta_4}{\delta_3} - M_{\delta}^2 \right] \frac{1}{U_{\delta}} \frac{dU_{\delta}}{dx} + (-2C_D) + \frac{\rho_0 v_0}{\rho_{\delta} U_{\delta}} \left[\left(\frac{u_0}{U_{\delta}} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (2.6.17)$$

A consideração de escoamento laminar, permanente, com gradiente de pressão arbitrário, sucção na parede, propriedades físicas variáveis de um fluido qualquer nos conduziram às equações dadas. No caso particular do escoamento de um fluido incompressível tem-se $\rho = \rho_{\delta} = \text{const.}$ donde $M_{\delta} = 0$ e $\delta_4 = 0$. Assim, as equações integrais da quantidade de movimento e da energia mecânica são conforme abaixo, para os dois tipos de fluido considerados:

incompressível:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \frac{1}{U_{\delta}} \frac{dU_{\delta}}{dx} - \frac{C_f}{2} + \frac{v_0}{U_{\delta}} \left(\frac{u_0}{U_{\delta}} - 1 \right) = 0 \quad (2.6.18)$$

compressível:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} - M_{\delta}^2 \right) \frac{1}{U_{\delta}} \frac{dU_{\delta}}{dx} - \frac{C_f}{2} - \frac{\rho_0 v_0}{\rho_{\delta} U_{\delta}} \left(\frac{u_0}{U_{\delta}} - 1 \right) = 0 \quad (2.6.12)$$

incompressível:

$$\frac{d\delta_3}{dx} + 3 \cdot \delta_3 \cdot \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} - 2C_D + \frac{v_0}{U_\delta} \left[\left(\frac{u_0}{U_\delta} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (2.6.19)$$

compressível:

$$\frac{d\delta_3}{dx} + \delta_3 \left(3 - 2 \frac{\delta_3}{\delta_3} - M_\delta^2 \right) \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} - 2C_D + \frac{\rho_0 v_0}{\rho_\delta U_\delta} \left[\left(\frac{u_0}{U_\delta} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (2.6.20)$$

A determinação de uma terceira equação para o caso hidrodinâmico é dada pela condição de compatibilidade na parede.

No caso da consideração da temperatura, a utilização de potências de entalpia como feito por SCHMAL [13] e aqui por nós desenvolvido, nos conduz a multiplicar a equação da continuidade por $h_\delta^{v+1} - h_0^{v+1}$ e a da energia por $(v+1)h^v$ obtendo-se:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\rho u (h_\delta^{v+1} - h_0^{v+1}) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v (h_\delta^{v+1} - h_0^{v+1}) \right] = - (v+1) \cdot h^v \frac{\partial}{\partial y} \left[u\tau + K_c \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (2.6.21)$$

Integrando esta equação com relação a y entre os limites y = 0 e y = δ obtêm-se:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta \rho u (h_\delta^{v+1} - h_0^{v+1}) dy \right] = \rho_0 v_0 [h_\delta^{v+1} - h_0^{v+1}] - (v+1) \int_0^\delta h^v \frac{\partial}{\partial y} \left(u\tau + K_c \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \quad (2.6.22)$$

Para o valor $v = 0$ obtêm-se a equação fisicamente interpretável

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta \rho u (h_\delta - h) dy \right] = \rho_0 v_0 (h_\delta - h_0) - \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y} \left(u\tau + K_c \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \quad (2.6.23)$$

Com a utilização da relação para a entalpia e energia interna

$$h = i + \frac{u^2}{2} \quad (2.6.24)$$

$$i = C_p \cdot T \quad (2.6.25)$$

Obtêm-se as relações

$$h = C_p T + \frac{u^2}{2} \quad (2.6.26)$$

$$h_\delta = \frac{u_\delta^2}{2} + C_p T_\delta \quad (2.6.27)$$

que aplicadas à equação nos fornecem

$$C_p \frac{d}{dx} \left[\rho_\delta U_\delta \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta} \cdot T_\delta \left(1 - \frac{T}{T_\delta} \right) dy + \frac{1}{C_p} \frac{\rho_\delta U_\delta^3}{2} \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta} \left(1 - \left(\frac{u}{U_\delta} \right)^2 \right) dy \right] =$$

$$\rho_0 v_0 \left(\frac{u_\delta^2}{2} + C_p (T_\delta - T_0) \right) + K_c \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (2.6.28)$$

Utilizando a lei dos gases com a relação

$$\frac{T}{T_\delta} = \frac{\rho_\delta}{\rho} \quad (2.6.29)$$

e com

$$\frac{U_\delta^2}{C_p T_\delta} = (K-1) M_\delta^2 \quad (2.6.30)$$

em que $K = \frac{C_p}{C_v}$ e considerando as definições de δ_3 e δ_4 abaixo

$$\delta_3 = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta} \left(1 - \left(\frac{u}{U_\delta} \right)^2 \right) dy \quad (2.6.15)$$

$$\delta_4 = \int_0^\delta \frac{u}{U_\delta} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_\delta} \right) dy \quad (2.6.16)$$

Obtêm-se a equação diferencial ordinária

$$C_p \frac{d}{dx} \left[\rho_\delta U_\delta T_\delta \cdot \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \delta_3 - \delta_4 \right] = \rho_0 v_0 C_p \left[T_\delta \frac{K-1}{2} M_\delta^2 + (T_\delta - T_0) \right] + K_c \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (2.6.31)$$

Esta equação pode ser expressa em função de $\frac{\delta_3}{\delta_2}$ se considerarmos o perfil de temperatura conforme Apêndice I, por

$$\frac{T}{T_\delta} = A + (B + Kx) \frac{U}{U_\delta} + (C - Kx) \left(\frac{U}{U_\delta} \right)^2 \quad (2.6.32)$$

em que

$$A = 1 + r \cdot \frac{K-1}{2} M_\delta^2 (1 - \theta) \quad (2.6.33)$$

$$B = r \cdot \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \theta \quad (2.6.34)$$

$$C = -r \cdot \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \quad (2.6.35)$$

$$\theta = \frac{T_e - T_0}{T_e - T_\delta} \quad (2.6.36)$$

é possível escrever então a relação $\frac{\delta_4}{\delta_2}$ como

$$\frac{\delta_4}{\delta_2} = r \cdot \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} - \theta \right) + Kx \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} - 1 \right) \quad (2.6.37)$$

A equação diferencial da energia é obtida então

$$C_p \frac{d}{dx} \left\{ \rho_\delta U_\delta T_\delta \left(\frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \delta_3 - \delta_2 \left[r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} - \theta \right) + Kx \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} - 1 \right) \right] \right) \right\} =$$

$$\rho_0 v_0 C_p \left[(T_\delta - T_0) + T_\delta \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \right] + K_c \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (2.6.38)$$

Considerando as relações

$$G = C_p \rho_\delta U_\delta T_\delta \quad (2.6.39)$$

$$E = \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \frac{\delta_3}{\delta_2} - \left[r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} - \theta \right) + Kx \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} - 1 \right) \right] \quad (2.6.40)$$

$$F = \rho_0 v_0 C_p \left[(T_\delta - T_0) + T_\delta \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \right] + K_c \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (2.6.41)$$

Obtemos a equação diferencial ordinária da energia

$$\frac{d}{dx} (G + E \cdot \delta_2) = F \quad (2.6.42)$$

A partir desta equação é determinado o valor de E que, quando com-
parado com o valor dado pela equação (2.6.40)

$$E = \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \frac{\delta_3}{\delta_2} - \left[r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} - \theta \right) + Kx \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} - 1 \right) \right] \quad (2.6.40)$$

nos possibilitam obter o valor de Kx , correção para o efeito do
gradiente de pressão no perfil de temperatura bem como para o e-
feito da variação da temperatura na parede.

Na equação da energia, definimos o parâmetro F em função
de

$$K_c \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (2.6.43)$$

que pode ser desenvolvido para o perfil de temperaturas $T = T\left(\frac{u}{U_\delta}\right)$ conforme abaixo:

$$K_c \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \equiv K_0 \frac{\partial T}{\partial u} \Big|_{u=0} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \equiv K_0 \frac{\tau_0}{\mu_0} \frac{\partial \frac{T}{T_\delta}}{\partial \frac{u}{U_\delta}} \Big|_{u=0} \cdot \frac{T_\delta}{U_\delta} \quad (2.6.44)$$

a consideração do perfil de temperaturas (2.6.32) nos dará

$$\frac{T}{T_\delta} = A + (B + Kx) \frac{u}{U_\delta} + (C - Kx) \left(\frac{u}{U_\delta} \right)^2 \quad (2.6.32)$$

$$\frac{\partial \frac{T}{T_\delta}}{\partial \frac{u}{U_\delta}} = (B + Kx) + 2(C - Kx) \left(\frac{u}{U_\delta} \right) \quad (2.6.45)$$

$$\frac{\partial \frac{T}{T_\delta}}{\partial \frac{u}{U_\delta}} \Big|_{u=0} = B + Kx \quad (2.6.46)$$

com o valor de B dado por

$$B = r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \theta \quad (2.6.47)$$

obtemos

$$\frac{\partial \frac{T}{T_\delta}}{\partial \frac{u}{U_\delta}} \Big|_{u=0} = r \cdot \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \theta + Kx \quad (2.6.48)$$

donde finalmente

$$K_c \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{K_0}{\mu_0 C_p} \cdot \frac{\tau_0}{\rho_\delta U_\delta^2} \cdot C_p \cdot \rho_\delta U_\delta T_\delta \left(r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \theta + Kx \right) \quad (2.6.49)$$

que com as definições do número de Prandtl e do coeficiente de ar

raste, pode ser escrita

$$K_c \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{Pr_0} \cdot \frac{C_f}{2} \cdot G \cdot \left(r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \theta + Kx \right) \quad (2.6.50)$$

A equação diferencial da energia pode então ser escrita como:

$$\frac{d}{dx} (G \cdot E \cdot \delta_2) = \frac{G}{Pr_0} \cdot \frac{C_f}{2} \cdot \left(r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \theta + Kx \right) + \rho_0 v_0 C_p \left((T_\delta - T_0) + T_\delta \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \right) \quad (2.6.51)$$

É conveniente adimensionalizar o último termo desta expressão, obtendo

$$\rho_0 v_0 C_p \left[(T_\delta - T_0) + T_\delta \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \right] \equiv \frac{\chi G}{Re_{\delta_2}} \cdot \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot [r(1-\theta) - 1] \quad (2.6.52)$$

onde χ é o parâmetro de sucção, definido em (2.5.2) e Re_{δ_2} é o número de Reynolds definido em (2.5.1).

A equação diferencial da energia pode ser transformada, considerando a relação deduzida no APÊNDICE II:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\alpha}{Re_{\delta_2}} \quad (2.6.53)$$

obtemos, então:

$$\frac{d}{dx} (G \cdot E \cdot \delta_2) = \frac{G}{Re_{\delta_2}} \left\{ \frac{\alpha}{Pr_0} \left(r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \theta + Kx \right) + \chi \left(\frac{K-1}{2} M_\delta^2 (r[1-\theta] - 1) \right) \right\} \quad (2.6.54)$$

desenvolvendo o primeiro membro da equação para resolvê-la em função de E temos

$$GE \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \frac{d}{dx} (G \cdot E) \equiv E \left(G \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \frac{dG}{dx} \right) + \delta_2 \cdot G \cdot \frac{dE}{dx} \quad (2.6.55)$$

A equação pode ser escrita então

$$G \cdot \delta_2 \cdot \frac{dE}{dx} + \left(G \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \frac{dG}{dx} \right) E = \frac{G}{Re_{\delta_2}} \left\{ \frac{\alpha}{Pr_0} \left[r \frac{K-1}{2} M_{\delta}^2 \cdot \theta + Kx \right] + \chi \left[\frac{K-1}{2} M_{\delta}^2 (r(1-\theta)-1) \right] \right\} \quad (2.6.56)$$

ou, dividindo ambos os membros por $G \cdot \delta_2$ e considerando a definição

$$Z_j = Re_{\delta_2} \cdot \delta_2 \quad (2.6.57)$$

obtemos

$$\frac{dE}{dx} + \left(\frac{1}{\delta_2} \cdot \frac{d\delta_2}{dx} - \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \right) \cdot E = \frac{1}{Z_j} \left\{ \frac{\alpha}{Pr_0} \left[r \frac{K-1}{2} M_{\delta}^2 \cdot \theta + Kx \right] + \chi \left[\frac{K-1}{2} M_{\delta}^2 (r(1-\theta)-1) \right] \right\} \quad (2.6.58)$$

$\frac{d\delta_2}{dx}$ é obtida da equação integral da quantidade de movimento (2.6.12) e (2.5.2.1) e (2.6.53).

$$\frac{1}{\delta_2} \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\alpha}{Re_{\delta_2} \cdot \delta_2} - \frac{\chi}{Re_{\delta_2} \cdot \delta_2} - \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} - M_{\delta}^2 \right) \frac{1}{U_{\delta}} \frac{dU_{\delta}}{dx} \quad (2.6.59)$$

$G = \rho_{\delta} U_{\delta} T_{\delta} \cdot C_p$ nos permite obter após diferenciar com relação a x e utilizando a relação (2.6.2)

$$\frac{1}{G} \cdot \frac{dG}{dx} = \left(\frac{1}{T_{\delta}} \frac{dT_{\delta}}{dx} + \frac{1}{U_{\delta}} \frac{dU_{\delta}}{dx} (1 - M_{\delta}^2) \right) \quad (2.6.60)$$

donde obtemos a equação na forma geral:

$$\frac{dE}{dx} + \left\{ \frac{\alpha - \chi}{Z_j} + \frac{1}{T_{\delta}} \frac{dT_{\delta}}{dx} - \frac{1}{U_{\delta}} \frac{dU_{\delta}}{dx} \left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \right\} \cdot E =$$

$$\frac{1}{Z_j} \left\{ \frac{\alpha}{Pr} \left[\frac{K-1}{2} M_{\delta}^2 \cdot \theta + Kx \right] + \chi \left[\frac{K-1}{2} M_{\delta}^2 (r(1-\theta)-1) \right] \right\} \quad (2.6.61)$$

que com a definição (2.6.40) nos permite escrever

$$E = Z_H = \left\{ \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \frac{\delta_3}{\delta_2} - \left[r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} - \theta \right) + Kx \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} - 1 \right) \right] \right\} \quad (2.6.62)$$

$$G_H = \left[\frac{\alpha - \chi}{Z_j} + \frac{1}{T_\delta} \frac{dT_\delta}{dx} - \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} \left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \right] \quad (2.6.63)$$

$$F_H = \frac{1}{Z_j} \left\{ \frac{\alpha}{Pr_0} \left[r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \theta + Kx \right] + \chi \left[\frac{K-1}{2} M_\delta^2 r(1-\theta) - 1 \right] \right\} \quad (2.6.64)$$

obtemos, assim, uma equação diferencial ordinária da forma

$$\frac{dZ_H}{dx} + G_H \cdot Z_H - F_H = 0 \quad (2.6.65)$$

CAPÍTULO III

PERFIL DE VELOCIDADES

III.1 - Determinação do Perfil de Velocidade.

A resolução das equações da camada limite pelos métodos aproximados empregam comumente, expressões polinomiais para o perfil de velocidade. A expressão polinomial é escolhida em função das condições de contorno que é possível atender e é tanto mais exata, quanto maior o número de condições de contorno que satisfaz bem como mais próxima da solução exata, quando esta é possível de ser obtida, p. ex. no caso de escoamento do tipo $U_{\delta}(x) \approx x^m$.

A utilização de parâmetros de forma no perfil de velocidade ajusta o perfil a diversas situações do escoamento nas regiões aceleradas e retardadas.

POHLAUSEN [12], [19] apresentou um perfil polinomial do 4º grau com um parâmetro de forma $\gamma(x)$, a saber:

$$\frac{u}{U_{\delta}} = 1 - (1 - \eta)^3 (1 + a_1 \eta) \quad (3.1.1)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad (3.1.2)$$

$$a_1 = 1 - \frac{\gamma}{6} \quad (3.1.3)$$

e se define

$$\gamma(x) = - \frac{\partial^2 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^2} \bigg|_{y=0} \quad (3.1.4)$$

Comparada com a solução de Hartree e a série de Blasius (até x_{11}) verifica-se que a solução aproximada de Pohlhausen é boa para valores próximos do ponto de estagnação, escoamento externo acelerado, mas que não é precisa na região próxima à separação, escoamento retardado.

A solução de Pohlhausen prevê ponto de separação a $\gamma(x) = -12$. Se $\gamma(x) > -12$, $\frac{u}{U_\delta} > 1$ que, normalmente não apresenta significado físico. WALZ [19] acrescenta restrições à validade deste perfil com situações em que $\gamma(x) > -12$ e $\frac{u}{U_\delta} < 1$ com escoamentos com sucção ou fortemente acelerado.

Uma tentativa de contornar esta deficiência do perfil polinomial do 4º grau foi feita por MEL'NIKOF [9], em 1942, ao manter o perfil de Pohlhausen nas regiões aceleradas e utilizar a solução de HOWARTH [9], $u = C_0 - C_1 \cdot x$ para regiões retardadas, acoplando as duas soluções no ponto de pressão mínima.

SCHLICHTING e ULRICH [12], em 1940, utilizaram um polinômio do 6º grau mas não obtiveram resultados melhores que o dado pelo polinômio do 4º grau.

Em 1937, SUTTON [12] aplicou um perfil de velocidades bi-paramétrico para o caso da placa plana $\left(\frac{dU_\delta}{dx} = 0\right)$.

Em seguida, WIEGHARDT [19] aplicou um perfil bi-paramétrico do 11º grau dado por:

$$\frac{u}{U_\delta} = 1 - (1-\eta)^8 \cdot (1 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3) \quad (3.1.5)$$

em que os coeficientes A_1 , A_2 e A_3 são funções dos parâmetros $\alpha(x)$ e $\Gamma(x)$ assim definidos:

$$\alpha(x) = \frac{\frac{u}{U_\delta}}{\frac{y}{\delta_2}} \bigg|_{y=0} \quad \Gamma(x) = - \frac{\frac{\partial^2 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta_2}\right)^2}}{\frac{\partial \left(\frac{y}{\delta_2}\right)^2}} \bigg|_{y=0} \quad (3.1.6)$$

Nós já havíamos definido $\gamma(x) = f(\eta)$ e $\epsilon(x) = f(\eta)$ donde são válidas as relações:

$$\Gamma(x) = \gamma(x) \left(\frac{\delta_2}{\delta}\right)^2 \quad \alpha(x) = \epsilon(x) \cdot \frac{\delta_2}{\delta} \quad (3.1.7)$$

O perfil de Wieghardt apresenta resultados satisfatórios para prever o ponto de separação mas não é tão preciso quanto o perfil de Pohlhausen nas regiões próximas do ponto de estagnação.

Inúmeros estudos [1] levaram a concluir que o polinômio deve ter grau variável de maneira a atender as diferentes regiões do escoamento.

Um perfil uni-paramétrico deste tipo já havia sido proposto por LOITSIANSKII [9], em 1942. Sua solução, contudo, não considera a equação da energia mecânica sendo por isto menos precisa que a de Geropp.

Geropp propôs o perfil bi-paramétrico da forma:

$$\frac{u}{U_\delta} = 1 - (1 - \eta)^\tau \cdot (1 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3) \quad (3.1.8)$$

e baseado nas soluções de Hartree, relacionou $\tau(x)$ e $\epsilon(x)$ na forma:

$$\tau(x) = 7 + 1,7513 \cdot \epsilon(x) - 0,7026 \cdot \epsilon(x)^2 \quad 0 < \epsilon < 1 \quad (3.1.9)$$

$$\tau(x) = 8 - 0,0235 \cdot \epsilon(x) + 0,0722 \cdot \epsilon(x)^2 \quad \epsilon > 1 \quad (3.1.10)$$

Com o grau do polinômio variável, Geropp superou as dificuldades de Wieghardt bem como estendeu as soluções integrais para os casos de escoamento compressível, com ou sem troca de calor, apresentando excelentes resultados para soluções comparadas com a solução exata de Goertler e experiência.

III.2 - Coeficientes do Perfil de Velocidade.

Os coeficientes A_1 , A_2 e A_3 são determinados a partir do perfil de velocidades de Geropp, utilizando as definições:

$$\epsilon(x) = \frac{\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}}{\frac{U_\delta}{\delta}} \quad (3.1.11)$$

$$\gamma(x) = - \frac{\left. \frac{\partial^2 u}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^2} \right|_{y=0}}{\frac{U_\delta}{\delta^2}} \quad (3.1.4)$$

Derivando o perfil de velocidades com relação a η obtemos (Apêndice I)

$$A_1 = \tau - \epsilon \quad (3.1.12)$$

Derivando outra vez com relação a η obtemos (Apêndice I)

$$A_1 = \frac{\gamma}{2} - \tau \cdot \epsilon + \frac{\tau^2 + \tau}{2} \quad (3.1.13)$$

Para determinação de A_3 utilizaremos a condição de compatibilidade na parede que é derivada em relação a γ e aplicada em $\gamma = 0$. O resultado é adimensionalizado e igualado à derivada terceira do perfil de velocidades em relação a η .

Obtemos (caso de fluido newtoniano e isotérmico) (Apêndice I)

$$A_3 = \frac{\gamma}{6} \left(3\tau + \chi \left(\frac{\Gamma}{\gamma} \right)^{-1/2} \right) - \epsilon \frac{\tau^2 + \tau}{2} + \frac{\tau^3 + 3\tau^2 + 2\tau}{6} \quad (3.1.14)$$

e no caso geral

$$A_3 = \frac{\gamma}{6} \left[3\tau + \chi \left(\frac{\Gamma}{\gamma} \right)^{-1/2} + 2 \cdot w \cdot \epsilon \cdot \frac{B + Kx}{A} \right] - \epsilon \frac{\tau^2 + \tau}{2} + \frac{\tau^3 + 3\tau^2 + 2\tau}{6} \quad (3.1.15)$$

Uma vez que $\tau = f(\epsilon)$ e $\Gamma = \gamma \left(\frac{\delta}{\delta_2} \right)^2$ vemos que os coeficientes são função dos parâmetros ϵ , γ e χ (caso isotérmico) acrescidos de w , A , B e Kx no caso geral.

Para o caso de escoamento sem sucção ($\chi = 0$) e de fluido newtoniano, os coeficientes foram calculados por Geropp e temos um perfil bi-paramétrico função de ϵ e γ .

III.3 - Coeficiente de Arraste e Dissipação.

Os coeficientes C_f e C_D podem ser definidos em função de $\alpha(x)$ e β , bem como do número de Reynolds com relação à espessura de perda de momentum. São eles assim definidos:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\tau_0}{\rho_\delta U_\delta^2} \quad (3.3.1)$$

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}}{\rho_\delta U_\delta^2} = \frac{\mu_0 \cdot \frac{U_\delta}{\delta_2} \cdot \frac{\partial \frac{u}{U_\delta}}{\frac{y}{\delta_2}} \Big|_{y=0}}{\rho_\delta U_\delta^2} \quad (3.3.2)$$

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\frac{\partial \frac{u}{U_\delta}}{\frac{y}{\delta_2}} \Big|_{y=0}}{\frac{\rho_\delta U_\delta \delta_2^2}{\mu_0}} = \frac{\alpha}{Re_{\delta_2}} \quad (3.3.3)$$

Da definição do coeficiente de dissipação (2.6.14) obtemos

$$2 \cdot C_D = \frac{2}{\rho_\delta U_\delta^3} \cdot \left[U_0 \tau_0 + \int_{U_0}^{U_\delta} \tau \cdot du \right] \quad (3.3.4)$$

que no caso do fluído viscoso nos permite escrever, após adimensionalizar (Apêndice II)

$$2 \cdot C_D = \frac{2}{Re_{\delta_2}} \cdot \left[\frac{\delta_2}{\delta} \cdot \int_0^1 \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \left(\frac{\partial \frac{u}{U_\delta}}{\partial \eta} \right)^2 \cdot d\eta \right] \quad (3.3.5)$$

ou

$$2 C_D = \frac{2}{Re_{\delta_2}} \cdot \beta \quad (3.3.6)$$

Em que

$$\beta = \frac{\delta_2}{\delta} \int_0^1 \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \left(\frac{\partial \frac{u}{\delta}}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \quad (3.3.7)$$

A consideração do perfil de velocidades (Cap. III) e de temperatura (Cap. IV) e da relação (2.4.8) obtemos

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\mu}{\mu_\delta} \cdot \frac{\mu_\delta}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_\delta} \right)^w \cdot \frac{\mu_\delta}{\mu_0} \quad (3.3.8)$$

e, considerando o perfil de temperatura aplicado no ponto $y=0$ nos dará

$$\frac{\mu_0}{\mu_\delta} = \left(\frac{T_0}{T_\delta} \right)^w = A^w \quad (3.3.9)$$

obtemos

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_\delta} \right)^w \cdot \frac{1}{A^w} = \left(\frac{T}{T_\delta} \right)^w \frac{1}{A} \quad (3.3.10)$$

Aplicado à equação (3.3.7) obtemos

$$\begin{aligned} \beta = \frac{\delta_2}{\delta} \int_0^1 \left[1 + \frac{B+Kx}{A} \cdot \left(\frac{u}{u_\delta} \right) + \frac{C-Kx}{A} \cdot \left(\frac{u}{u_\delta} \right)^2 \right]^w \cdot \left\{ (1-\eta)^{2(\tau-1)} \cdot \tau(1-EK) - A_1 + \right. \\ \left. + \eta \left[(\tau+1)A_1 - 2A_2 \right] + \eta^2 \left[(\tau+2)A_2 - 3A_3 \right] + \right. \\ \left. + \eta^3 \left[(\tau+3)A_3 \right] \right\} d\eta \quad (3.3.11) \end{aligned}$$

III.4 - Parâmetros do Perfil de Velocidade.

O perfil de velocidade tem a seguinte representação ana

lítica:

$$\frac{u(x,y)}{U_{\delta}(x)} = f\left(\frac{y}{\delta(x)}, \epsilon(x), \gamma(x), \chi\right) \quad (3.4.1)$$

em que os parâmetros têm as definições:

$\delta(x)$ = parâmetro de espessura da camada limite

$\epsilon(x)$ = parâmetro de forma

$\gamma(x)$ = parâmetro de forma

χ = parâmetro de sucção, considerado constante mas po de ser variável.

Neste trabalho utilizou-se para parâmetro de espessura da camada limite, a espessura de perda de momentum δ_2 definida co mo

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_{\delta} \delta} \left(1 - \frac{u}{U_{\delta}}\right) dy \quad (2.6.10)$$

Foram utilizados como parâmetros de forma $\Gamma(x)$ e H_{32} , defini- dos como

$$\Gamma(x) = \gamma(x) \cdot \left(\frac{\delta_2}{\delta}\right)^2 \quad (3.4.2)$$

$$H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2} \quad (3.4.3)$$

É conveniente reproduzir os diversos parâmetros e suas definições, o que fazemos abaixo:

$$\epsilon(x) = \frac{\partial \frac{u}{U_{\delta}}}{\partial \frac{y}{\delta}} \bigg|_{y=0} \quad \alpha(x) = \frac{\frac{u}{U_{\delta}}}{\partial \frac{y}{\delta_2}} \bigg|_{y=0} \quad (3.4.4)$$

$$\gamma(x) = - \frac{\partial^2 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^2} \bigg|_{y=0}$$

$$\Gamma(x) = - \frac{\partial^2 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta_2}\right)^2} \bigg|_{y=0} \quad (3.1.6)$$

$$\alpha(x) = \varepsilon(x) \cdot \frac{\delta^2}{\delta}$$

$$\Gamma(x) = \gamma(x) \left(\frac{\delta^2}{\delta}\right)^2 \quad (3.1.7)$$

A utilização dos parâmetros é feita no Apêndice I, para dedução dos coeficientes do perfil de velocidade.

CAPÍTULO IV

PERFIL DE TEMPERATURAS

IV.1 - Determinação do Perfil de Temperatura.

Baseado nos estudos de Van Driest para a placa plana, e número de Prandtl variável é possível escrever um perfil de temperatura da forma

$$\frac{T}{T_{\delta}} = A + B\left(\frac{u}{u_{\delta}}\right) + C\left(\frac{u}{u_{\delta}}\right)^2 \quad (4.1.1)$$

onde A, B e C são os coeficientes de equação determinados para o caso $\frac{dp}{dx} = 0$ e $\frac{dT}{dx} = 0$, placa plana e temperatura de parede constante.

Vários autores [19] concluíram que fortes gradientes de pressão têm pouca influência sobre a transferência de calor, porém fortes gradientes de temperatura podem influir de maneira considerável. A correção dos gradientes de pressão é feita na equação de Van Driest modificando o coeficiente B, e a correção para o gradiente de temperatura é feita no coeficiente C. WALZ [19] propôs introduzir um coeficiente Kx como parâmetro de correção a ser determinado. Este parâmetro corrige também o termo $\frac{dp}{dx} \neq 0$. Para que as condições de contorno do perfil sejam válidas, é necessário corrigir o coeficiente C pelo termo $[C-Kx]$. O perfil obtido é do tipo

$$\frac{T}{T_\delta} = A + [B+Kx] f_1 + [C-Kx] f_2 \quad (4.1.2)$$

A determinação de Kx é feita através da utilização da Equação da Energia Térmica. Este perfil é geral e válido para escoamento laminar, turbulento, compressível e incompressível com gradientes de pressão e fortes gradientes de temperatura na parede.

IV.2 - Coeficientes e Parâmetros do Perfil.

A consideração do perfil de temperaturas

$$\frac{T}{T_\delta} = A + (B + Kx) \cdot f_1 + (C - Kx) \cdot f_2 \quad (4.2.1)$$

nos levam a admitir, visto que no ar ($P_r = 0.72$) se tem um pequeno afastamento do número de Prandtl da unidade, que podemos considerar [19] as relações abaixo

$$f_1 \approx \frac{u}{U_\delta} \quad (4.2.2)$$

$$f_2 \approx \left(\frac{u}{U_\delta} \right)^2 \quad (4.2.3)$$

com

$$A = 1 + r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 (1-\theta) \quad (4.2.4)$$

$$B = \theta \cdot r \cdot \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \quad (4.2.5)$$

$$C = - r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \quad (4.2.6)$$

$$\theta = \frac{T_e - T_0}{T_e - T_\delta} \quad (4.2.7)$$

O parâmetro Kx será calculado através da Equação de Energia Térmica como veremos adiante neste trabalho.

Na definição do parâmetro de transferência de calor θ temos T_e , "recovery temperature" definido por

$$T_e = T_\infty \left(1 + r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \right) \quad (4.2.8)$$

que, no ponto de estagnação vale

$$T_{st} = T_\infty \left(1 + \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \right) \quad (4.2.9)$$

CAPÍTULO V

VELOCIDADE E TEMPERATURA DO ESCOAMENTO EXTERNO

V.1 - Velocidade do escoamento Externo

O mais comum para a sua expressão é utilizar fórmulas a partir da teoria potencial. Blasius, em 1908, apresentou uma solução deste tipo que foi desenvolvida por Howarth em 1935. Nela a velocidade do escoamento externo é representada por uma série de potências de x , a partir do ponto de estagnação, SCHLICHTING [12].

A solução de Blasius exige muitos termos, sobretudo na região próxima do ponto de estagnação. HIEMENZ [6], [8], [12] verificou-a experimentalmente e nos pontos próximos da estagnação apresentou bons resultados, mas que não era satisfatória próximo à separação.

Para o caso do cilindro, a teoria potencial permite determinar uma distribuição senusoidal. Como já observado, ela não prediz o ponto de separação. Evidencia-se a necessidade de utilizar uma representação originária da experiência.

Segundo HIEMENZ [6], [8], pode ser representado o campo de velocidades na extremidade da camada limite como

$$U_{\delta}(x) = 7,151x - 0,04497x^3 - 0,0003300x^5 \quad (5.1.1)$$

com as seguintes condições:

$$R = 4,87 \text{ cm} \quad (5.1.2)$$

$$U_{\infty} = 19,2 \text{ cm/s} \quad (5.1.3)$$

$$Re_{\infty} = 18 \ 500 \quad (5.1.4)$$

A adimensionalização conduz à forma

$$U^* = X^* - 0,006282963x^{*3} - 0,00004647x^{*5} \quad (5.1.5)$$

onde

$$U^* = \frac{U_{\delta}}{K \cdot U_{\infty}} \quad (5.1.6)$$

$$x^* = \frac{x}{L} \quad (5.1.7)$$

$$L = 1 \text{ cm} \quad (5.1.8)$$

Esta representação formal introduzida por GOERTLER [5] é a utilizada por GEROPP [5] e SCHMAL [13]. Ela concorda com os resultados experimentais na faixa em que o escoamento é laminar.

Sua utilização no trabalho de FIGUEIREDO [1] foi feita com sucesso, levando a previsão do ponto de separação a uma boa concordância com os resultados experimentais.

Este perfil de velocidades da extremidade da camada limite será por nós considerado.

V.2 - Temperatura do Escoamento Externo.

No tratamento que é dado neste trabalho à equação da e-

nergia, faz-se necessário a utilização do perfil de temperaturas do escoamento externo.

Até o presente, nenhum trabalho experimental traduziu o comportamento da temperatura da extremidade da camada limite em função da distância x ao ponto de estagnação.

Todos os trabalhos pesquisados se resumiram em expressar a variação da temperatura de um modo global pela transferência de calor do cilindro para o fluido circundante ou vice-versa, apresentando os resultados em função do Número de Nusselt, este como um produto de Número de Prandtl e Número de Reynolds.

No presente trabalho foi considerado que o perfil de temperaturas externas $T_\delta(x)$ tinha comportamento semelhante ao do perfil de velocidade externa, sendo calculado pela relação do número de Mach para os escoamentos da camada limite externa e o escoamento livre, a saber

$$M_\delta = \frac{U_\delta(x)}{\sqrt{KRT_\delta(x)}} \quad \therefore \quad M_\delta^2 = \frac{U_\delta(x)^2}{KRT_\delta(x)} \quad (5.2.1)$$

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{\sqrt{KRT_\infty}} \quad \therefore \quad M_\infty^2 = \frac{U_\infty^2}{KRT_\infty} \quad (5.2.2)$$

donde

$$\frac{T_\delta(x)}{T_\infty} = \left(\frac{U_\delta(x)}{U_\infty} \right)^2 \cdot \left(\frac{M_\infty}{M_\delta} \right)^2 \quad (5.2.3)$$

Este perfil, não definido para o ponto de estagnação, relaciona a temperatura externa com a velocidade externa.

CAPÍTULO VI

DETERMINAÇÃO DAS GRANDEZAS

VI.1 - Coeficientes e Parâmetros do escoamento.

Uma vez obtida as soluções das equações diferenciais [1]

$$\frac{dZ_j}{dx} + G_j Z_j - F_j = 0 \quad (6.1.1)$$

e

$$\frac{dZ_E}{dx} + G_E Z_E - F_E = 0 \quad (6.1.2)$$

diversos parâmetros podem ser calculados, tais como:

1. Coeficiente de arraste (C_f)
2. Coeficiente de dissipação (C_D)
3. Tensão de cisalhamento na parede (τ_0)

Os parâmetros de forma também são obtidos, a saber:

$$H_3 = \frac{\delta_3}{\delta_2} = \frac{Z_E}{Z_j} \quad (6.1.3)$$

$$\Gamma = - \frac{\partial^2 \frac{U}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta_2} \right)^2} \bigg|_{y=0} \quad (6.1.4)$$

e o parâmetro de sucção (χ) calculado em função do nível de sucção (∇) como utilizado por FIGUEIREDO [1] e SCHMAL [13].

Com a solução de Equação diferencial

$$\frac{dZ_H}{dx} + G_H Z_H - F_H = 0 \quad (2.6.65)$$

obtem-se o fator de correção (K_x) para as considerações de $\frac{dP}{dx} \neq 0$ e $\frac{dT}{dx} \neq 0$, fator este que nos permite calcular o fluxo de calor local (q_x).

Um importante parâmetro do escoamento e que será considerado no cálculo da transferência de calor é a tensão de cisalhamento na parede τ_0 , definida como

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (6.1.5)$$

na consideração do fluido newtoniano. Como visto anteriormente, podemos definir este parâmetro na forma geral

$$\tau_0 = m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \bigg|_{y=0} \quad (6.1.6)$$

que adimensionalizado nos dará

$$\tau_0 = m \left(\frac{U_\delta \frac{\partial \frac{u}{U_\delta}}{\frac{y}{\delta_2}}}{\frac{\delta_2}{\delta_2}} \right)^n \bigg|_{y=0} = m \frac{U_\delta^n}{\delta_2^n} \cdot \alpha^n \quad (6.1.7)$$

$$\tau_0 = \frac{\rho_\delta U_\delta^{(n+2-n)}}{\frac{\rho_\delta U_\delta^{2-n} \delta_2^n}{m}} \cdot \alpha^n \quad (6.1.8)$$

Como definimos

$$Re_{\delta_2} = \frac{\rho_\delta}{m} \cdot U_\delta^{2-n} \cdot \delta_2^n \quad (2.5.1.1)$$

obtemos finalmente

$$\frac{\tau_0}{\rho_\delta U_\delta^2} = \frac{\alpha^n}{Re_{\delta_2}} \quad (6.1.9)$$

É conveniente considerar que no caso de fluido newtoniano

$$m = \mu \quad (6.1.10)$$

que aplicado no ponto $y = 0$ nos fornecerá

$$m_0 = \mu_0 \quad (6.1.11)$$

donde a definição da tensão de cisalhamento no caso de fluido newtoniano compressível

$$\frac{\tau_0}{\rho_\delta U_\delta^2} = \frac{\alpha}{Re_{\delta_2}} \quad (6.1.12)$$

$$Re_{\delta_2} = \frac{\rho_\delta U_\delta \delta_2}{\mu_0} \quad (2.5.1.2)$$

desta maneira, τ_0 pode ser escrito como função do parâmetro do escoamento e do número de Reynolds definido como acima. Verifica-

se assim, que o coeficiente de viscosidade (μ) deve ser considerado o da parede (μ_0).

Da definição do coeficiente de arraste (C_f) obtemos

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\tau_0}{\rho_\delta U_\delta^2} = \frac{\alpha}{Re_{\delta_2}} \quad (6.1.13)$$

para fluido newtoniano, ou, no caso geral ($n \neq 1$)

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\tau_0}{\rho_\delta U_\delta^2} = \frac{\alpha^n}{Re_{\delta_2}} \quad (6.1.14)$$

$$Re_{\delta_2} = \frac{\rho_\delta U_\delta^{2-n} \delta_2^n}{m_0} \quad (6.1.15)$$

É conveniente representar o coeficiente de arraste na forma abaixo para fluido newtoniano,

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\tau_0}{\rho_\delta U_\delta^2} \cdot Re_\infty^{1/2} = \frac{\alpha}{\frac{Re_{\delta_2}}{Re_\infty^{1/2}}} \quad (6.1.16)$$

ou na forma geral

$$\frac{\tau_0}{\rho_\delta U_\delta^2} \cdot Re_\infty^{\frac{1}{n+1}} = \frac{\alpha^n}{\frac{Re_{\delta_2}}{Re_\infty^{\frac{1}{n+1}}}} \quad (6.1.17)$$

A relação $Re_{\delta_2}/Re_\infty^{1/2}$ pode ser obtida a partir da definição dos

números de Reynolds no escoamento externo e na camada limite, a saber:

$$Re_{\delta_2} = \frac{\rho_{\delta} U_{\delta}^{2-n} \delta_2^n}{m_0} \quad (6.1.15)$$

$$Re_{\infty} = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty}^{2-n} L^n}{m_{\infty}} \quad (6.1.18)$$

que aplicado ao fluido newtoniano compressível nos dará:

$$Re_{\delta_2} = \frac{\rho_{\delta} U_{\delta} \delta_2}{\mu_0} \quad (6.1.19)$$

$$Re_{\infty} = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty} L}{\mu_{\infty}} \quad (6.1.20)$$

Por conveniência, escreveremos

$$Re_{\delta_2} = \frac{\rho_{\delta} U_{\delta} \delta_2}{\mu_{\delta}} \cdot \frac{\mu_{\delta}}{\mu_0} \quad (6.1.21)$$

donde a relação

$$\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}} = \frac{\rho_{\delta}}{\rho_{\infty}} \cdot \frac{U_{\delta}}{U_{\infty}} \cdot \frac{\delta_2}{L} \cdot \frac{\mu_{\infty}}{\mu_{\delta}} \cdot \left(\frac{\mu_{\delta}}{\mu_0} \right) \quad (6.1.22)$$

ou, na forma geral

$$\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}} = \frac{\rho_{\delta}}{\rho_{\infty}} \cdot \left(\frac{U_{\delta}}{U_{\infty}} \right)^{2-n} \cdot \left(\frac{\delta_2}{L} \right)^n \cdot \frac{m_{\infty}}{m_{\delta}} \cdot \frac{m_{\delta}}{m_0} \quad (6.1.23)$$

considerando a definição

$$Z_j = Re_{\delta_2} \cdot \delta_2 \quad (6.1.24)$$

obtêm-se

$$\frac{Re_{\delta_2}^{n+1}}{Re_{\infty}} = \frac{\rho_{\delta}}{\rho_{\infty}} \cdot \left(\frac{U_{\delta}}{U_{\infty}} \right)^{2-n} \cdot \left(\frac{Z_j}{L} \right)^n \cdot \frac{m_{\infty}}{m_{\delta}} \cdot \frac{m_{\delta}}{m_0} \quad (6.1.25)$$

No caso de fluido newtoniano compressível, é possível representar as relações $\frac{\rho_{\delta}}{\rho_{\infty}}$ e $\frac{\mu_{\infty}}{\mu_{\delta}\mu_0}$ em função da temperatura na camada limite externa e a relação $\frac{\mu_{\delta}}{\mu_0}$ em função do perfil de temperatura $\frac{T}{T_{\delta}} = f(A, B, C, \frac{U}{U_{\delta}})$ no ponto $y=0$, $T=T_0$, $U=0$.

Estas relações são conforme abaixo:

$$\frac{\rho_{\delta}}{\rho_{\infty}} = \left(\frac{T_{\delta}}{T_{\infty}} \right)^{\frac{1}{K-1}} \quad (6.1.26)$$

$$\frac{\mu_{\delta}}{\mu_{\infty}} = \left(\frac{T_{\delta}}{T_{\infty}} \right)^w \quad (6.1.27)$$

$$\frac{\mu_{\delta}}{\mu_0} = \frac{1}{\frac{\mu_0}{\mu_{\delta}}} = \frac{1}{\left(\frac{T_0}{T_{\delta}} \right)^w} = \frac{1}{A^w} \quad (6.1.28)$$

A nossa relação $\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/2}}$ vale pois, para fluídos newtonianos compressíveis

$$\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/2}} = \left[\left(\left(\frac{T_{\delta}}{T_{\infty}} \right)^{\frac{1}{K-1} - w} \right) \cdot \left(\frac{U_{\delta}}{U_{\infty}} \right) \cdot \frac{Z_j}{R} \cdot \frac{1}{A^w} \right]^{1/2} \quad (6.1.29)$$

Uma extensão desse resultado, de interesse apenas teórico, é aque

le em que consideramos os fluidos não newtonianos, donde

$$\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/n+1}} = \left[\frac{\rho_{\delta}}{\rho_{\infty}} \cdot \left(\frac{U_{\delta}}{U_{\infty}} \right)^{2-n} \cdot \left(\frac{Z_j}{L} \right)^n \cdot \frac{m_{\infty}}{m_{\delta}} \cdot \frac{m_{\delta}}{m_0} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (6.1.30)$$

que no caso real de fluidos não newtonianos e incompressíveis isotérmicos nos dará

$$\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/n+1}} = \left[\left(\frac{U}{U_{\delta}} \right)^{2-n} \cdot \left(\frac{Z_j}{L} \right)^n \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (6.1.31)$$

o coeficiente de dissipação C_D pode ser obtido da seguinte maneira:

$$2 \cdot C_D = 2 \frac{\beta}{Re_{\delta_2}} \quad (3.3.6)$$

ou

$$2 \cdot C_D \cdot Re_{\infty}^{1/2} = 2 \cdot \frac{\beta}{\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/2}}} \quad (6.1.32)$$

Podemos agora, calcular o parâmetro de sucção (χ) em função do nível de sucção. Este nível, no caso de fluido incompressível é representado por uma relação entre o número de sucção no infinito ψ_{∞} e o número de Reynolds no infinito Re_{∞} , a saber [1], [13],

$$\nabla = \frac{\psi_{\infty}}{Re_{\infty}^{1/2}} \quad (6.1.33)$$

O parâmetro de sucção é então definido por:

$$\chi = \left[\frac{\psi_{\infty}}{Re_{\infty}^{1/2}} \cdot \frac{1}{Re_{\delta_2}} \cdot \left(\frac{Z_j}{L} \right) \right] \quad (6.1.34)$$

No caso de fluídos compressíveis devemos considerar a partir das definições dos parâmetros de sucção, números de sucção e número de Reynolds, conforme abaixo:

$$\chi = - \frac{v_0}{U_{\delta}} \cdot Re_{\delta_2} \quad (6.1.35)$$

$$\psi_{\infty} = \frac{\rho_{\infty}}{\mu_0} \cdot (-v_0) \cdot L \quad \therefore \quad \psi_{\delta_2} = \frac{\rho_{\delta}}{\mu_0} (-v_0) \cdot \delta_2 \quad (6.1.36)$$

$$Re_{\infty} = \frac{\psi_{\infty}}{\mu_{\infty}} \cdot U_{\infty} \cdot L \quad \therefore \quad Re_{\delta_2} = \frac{\rho_{\delta}}{\mu_0} \cdot U_{\delta} \cdot \delta_2 \quad (6.1.37)$$

Obtendo a relação $\frac{v_0}{U_{\delta}}$ das definições do número de sucção e do número de Reynolds

$$\frac{\psi_{\delta_2}}{Re_{\delta_2}} = - \frac{v_0}{U_{\delta}} \quad (6.1.38)$$

temos que o parâmetro de sucção χ será dado por:

$$\chi = Re_{\delta_2} \cdot \frac{\psi_{\delta_2}}{Re_{\delta_2}} = \psi_{\delta_2} \quad (6.1.39)$$

Observando que temos a relação abaixo para os números de sucção

$$\frac{\psi_{\delta_2}}{\psi_{\infty}} = \frac{\rho_{\delta}}{\rho_{\infty}} \cdot \frac{\mu_{\infty}}{\mu_0} \cdot \frac{\delta_2}{L} \quad (6.1.40)$$

e Z_j foi definido como variável auxiliar, donde

$$\delta_2 = \frac{Z_j}{Re_{\delta_2}} \quad (6.1.41)$$

obtêm-se para o número de sucção com relação à espessura δ_2

$$\psi_{\delta_2} = \psi_{\infty} \cdot \frac{1}{Re_{\delta_2}} \cdot \left(\frac{\rho_{\delta}}{\rho_{\infty}} \right) \left(\frac{\mu_{\infty}}{\mu_0} \right) \cdot \left(\frac{Z_j}{L} \right) \quad (6.1.42)$$

e, finalmente, para o parâmetro de sucção:

$$\chi = \frac{\psi_{\infty}}{Re_{\infty}^{1/2}} \cdot \frac{1}{\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/2}}} \cdot \left(\frac{\rho_{\delta}}{\rho_{\infty}} \right) \cdot \left(\frac{\mu_{\infty}}{\mu_{\delta}} \cdot \frac{\mu_{\delta}}{\mu_0} \right) \cdot \left(\frac{Z_j}{L} \right) \quad (6.1.43)$$

ou

$$\chi = \frac{\psi_{\infty}}{Re_{\infty}^{1/2}} \cdot \frac{1}{\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/2}}} \cdot \left[\left(\frac{T_{\delta}}{T_{\infty}} \right)^{\frac{1}{K-1} - w} \cdot \frac{1}{A^w} \cdot \left(\frac{Z_j}{L} \right) \right] \quad (6.1.44)$$

A relação $\frac{\psi_{\infty}}{Re_{\infty}^{1/2}}$ pode ser fixada arbitrariamente e é denominada de nível de sucção ∇ .

É igualmente conveniente definir o parâmetro espessura da perda de quantidade de movimento da camada limite como função da relação $\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/2}}$, a saber

$$\frac{\delta_2}{L} = \left[\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}} \right] \cdot \left\{ \left(\frac{\rho_{\delta}}{\rho_{\infty}} \right) \left(\frac{\mu_{\infty}}{\mu_{\delta}} \cdot \frac{\mu_{\delta}}{\mu_0} \right) \left(\frac{U_{\delta}}{U_{\infty}} \right) \right\}^{-1} \quad (6.1.45)$$

donde

$$\frac{\delta_2}{L} \cdot Re_{\infty}^{1/2} = \frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/2}} \cdot \left\{ \left(\frac{\rho_{\delta}}{\rho_{\infty}} \right) \left(\frac{\mu_{\infty}}{\mu_{\delta}} \cdot \frac{\mu_{\delta}}{\mu_0} \right) \left(\frac{U_{\delta}}{U_{\infty}} \right) \right\}^{-1} \quad (6.1.46)$$

ou

$$\frac{\delta_2}{L} Re_{\infty}^{1/2} = \frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/2}} \cdot \left\{ \left[\left(\frac{T_{\delta}}{T_{\infty}} \right)^{\frac{1}{K-1-W}} \right] \cdot \frac{1}{A^W} \cdot \frac{U_{\delta}}{U_{\infty}} \right\}^{-1} \quad (6.1.47)$$

Os coeficientes de dissipação e arraste são então definidos como

$$C_f \cdot Re_{\infty}^{1/2} = 2 \cdot \frac{\alpha}{\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/2}}} \quad (6.1.48)$$

e

$$C_D \cdot Re_{\infty}^{1/2} = \frac{\beta}{\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/2}}} \quad (6.1.49)$$

e a Tensão de cisalhamento na parede $\bar{\tau}$ é dada por

$$\frac{\tau_0}{\rho_{\delta} U_{\delta}^2} \equiv \left(\frac{\tau_0}{\rho_{\infty} U_{\infty}^2} \right) \cdot \frac{\rho_{\infty}}{\rho_{\delta}} \cdot \frac{U_{\infty}^2}{U_{\delta}^2} \quad (6.1.50)$$

ou

$$\frac{\tau_0}{\rho_{\infty} U_{\infty}^2} \cdot Re_{\infty}^{1/2} = \frac{\alpha}{\frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/2}}} \cdot \left(\frac{\rho_{\delta}}{\rho_{\infty}} \right) \cdot \left(\frac{U_{\delta}}{U_{\infty}} \right)^2 \quad (6.1.51)$$

VI.2 - Transferência de Calor e Número de Nusselt.

O fluxo de calor local q_x é obtida da forma a baixo:

$$q_x = - K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (6.2.1)$$

$$q_x = - K_0 \cdot \frac{T_\delta}{U_\delta} \cdot \left| \frac{\frac{\partial T}{\partial T_\delta}}{\frac{\partial u}{\partial U_\delta}} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (6.2.2)$$

A consideração do perfil de temperatura

$$\frac{T}{T_\delta} = A + (B+Kx) \frac{u}{U_\delta} + (C-Kx) \left(\frac{u}{U_\delta} \right)^2 \quad (6.2.3)$$

nos dará

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial T_\delta}}{\frac{\partial u}{\partial U_\delta}} = (B+Kx) + 2(C-Kx) \frac{u}{U_\delta} \quad (6.2.4)$$

que aplicada a $y = 0$ se torna

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial T_\delta}}{\frac{\partial u}{\partial U_\delta}} \Big|_{y=0} = B + Kx \quad (6.2.5)$$

Obtemos assim

$$q_x = - K_0 \cdot \frac{T_\delta}{U_\delta} \cdot (B+Kx) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) \quad (6.2.6)$$

Posterior transformação desta equação nos dará

$$q_x = - \frac{K_0}{C_p \mu_0} \cdot C_p \cdot \mu_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \cdot \frac{T_\delta}{U_\delta} (B + Kx) \quad (6.2.7)$$

que, com a aplicação da relação (6.1.13) se transforma em

$$q_x = - \frac{1}{Pr_0} \cdot \frac{C_f}{2} \cdot C_p \cdot T_\delta \cdot \rho_\delta \cdot U_\delta \cdot B \left(1 + \frac{Kx}{B} \right) \quad (6.2.8)$$

com a definição de

$$B = r \cdot \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \theta = r \cdot \frac{U_\delta^2}{2 C_p T_\delta} \cdot \theta \quad (6.2.9)$$

obtemos

$$q_x = - \frac{1}{Pr} \cdot \frac{C_f}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot \rho_\delta U_\delta^3 \cdot \theta \cdot \left(1 + \frac{Kx}{B} \right) \quad (6.2.10)$$

Assim, em termos do fator de analogia de Reynolds, pode ser escrita [19]

$$q_x = - \frac{r}{2} \cdot \frac{C_f}{2 \cdot s} \cdot \rho_\delta U_\delta^3 \cdot \theta \cdot \left(1 + \frac{Kx}{B} \right) \quad (6.2.11)$$

A consideração do número de Stanton (St) nos dará a forma

$$St = \frac{q_x}{\rho_\delta U_\delta C_p (T_\delta - T_0)} = \frac{C_f}{2 \cdot s} \quad (6.2.12)$$

donde a forma adimensional de transferência de calor

$$\frac{q_x}{\rho_\delta U_\delta^3} = - \frac{r}{2} \cdot St \cdot \theta \cdot \left(1 + \frac{Kx}{B} \right) \quad (6.2.13)$$

O número de Nusselt é definido como

$$Nu = \frac{q_x \cdot L}{K_c \cdot \Delta T} \quad (6.2.14)$$

e o número de Nusselt local será função do comprimento x na superfície do cilindro

$$(Nu)_x = \frac{q_x \cdot x}{K_c \cdot \Delta T} \quad (6.2.15)$$

A obtenção de C_f em função de $Re_\infty^{1/2}$ nos darão as formas abaixo para a transferência de calor:

$$\frac{q_x}{\rho_\delta U_\delta^3} \cdot Re_\infty^{1/2} = - \frac{r}{2} \cdot C_f \cdot Re_\infty^{1/2} \cdot \frac{1}{2 \cdot s} \cdot \theta \cdot \left(1 + \frac{Kx}{B}\right) \quad (6.2.16)$$

Com a consideração de q_x em função de $\rho_\delta U_\delta^3$ e $Re_\infty^{1/2}$ obtemos para o número de Nusselt:

$$\frac{(Nu)_x}{\rho_\delta U_\delta^3} \cdot Re_\infty^{1/2} = \frac{q_x \cdot x}{K_c \cdot \Delta T} \quad (6.2.17)$$

CAPÍTULO VII

SOLUÇÃO DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES

VII.1 - Sistema de Equações.

No trabalho referente à camada limite de velocidade [1] foram consideradas as seguintes características:

1. Escoamento permanente
2. Escoamento laminar
3. Fluido incompressível
4. Sem trocas de calor

O método de solução utilizado foi o desenvolvido por GEORPP [5], [13], [19], sendo aplicado tanto ao escoamento com propriedades físicas variáveis como constantes, com troca de calor ou não, escoamento laminar com gradiente de pressão arbitrário. No presente trabalho estamos considerando o caso mais geral de fluido compressível e trocas de calor, escoamento permanente e laminar com gradiente de pressão.

Serão utilizadas as equações integrais para a quantidade de movimento

$$\frac{d}{dx} \delta^2 + \delta^2 \left[2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} - M_\delta^2 \right] \frac{1}{U_\delta} \cdot \frac{dU_\delta}{dx} - \frac{C_f}{2} + \frac{\rho_0 v_0}{\rho_\delta U_\delta} \left(\frac{U_0}{U_\delta} - 1 \right) = 0$$

(2.6.12)

para a energia mecânica

$$\frac{d}{dx} \delta_3 + \delta_3 \left[3 - 2 \frac{\delta_4}{\delta_3} - M_\delta^2 \right] \frac{1}{U_\delta} \cdot \frac{dU_\delta}{dx} - 2C_D + \frac{\rho_0 v_0}{\rho_\delta U_\delta} \left[\left(\frac{U_0}{U_\delta} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (2.6.17)$$

e para a energia total

$$C_p \frac{d}{dx} \left\{ \rho_\delta U_\delta T_\delta \left(\frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \delta_3 - \delta_2 \left[r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} - \theta \right) + Kx \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} - 1 \right) \right] \right) \right\} =$$

$$\rho_0 v_0 C_p (T_\delta - T_0) + T_\delta \frac{K-1}{2} M_\delta^2 + K_c \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (2.6.38)$$

a condição de compatibilidade na parede

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\rho_\delta}{\rho_0} \cdot U_\delta \frac{dU_\delta}{dx} = \frac{1}{\rho_0} \left\{ w \cdot \frac{T_\delta}{T_0} \cdot \frac{1}{U_\delta} \cdot (B+Kx) \mu_0 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \Big|_{y=0} \right.$$

$$\left. + \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right\} \quad (2.4.14)$$

a condição de sucção

$$\chi = - Re_{\delta_2} \cdot \frac{v_0}{U_\delta} \quad (2.5.2.1)$$

um perfil de velocidade tri-paramétrico de forma

$$\frac{U}{U_\delta} = 1 - (1 - \eta)^\tau \cdot (1 - EK + A_1 \eta + A_2 \eta^2 + A_3 \eta^3) \quad (3.1.8)$$

e um perfil de temperatura da forma

$$\frac{T}{T_\delta} = A + (B+Kx) \frac{U}{U_\delta} + (C-Kx) \left(\frac{U}{U_\delta} \right)^2 \quad (2.6.32)$$

A substituição nas equações integrais da quantidade de movimento e da energia mecânica dos valores de C_f e C_D bem como as consi-

derações de fluido viscoso ($U_0 = 0$) nos fornecem as equações:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \left\{ 2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} - M_\delta^2 \right\} \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} - \frac{\alpha}{Re_{\delta_2}} - \frac{\rho_0 v_0}{\rho_\delta U_\delta} = 0 \quad (7.1.1)$$

$$\frac{d\delta_3}{dx} + \delta_3 \left\{ 3 + 2 \frac{\delta_4}{\delta_3} - M_\delta^2 \right\} \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} - 2 \cdot \frac{\beta}{Re_{\delta_2}} - \frac{\rho_0 v_0}{\rho_\delta U_\delta} = 0 \quad (7.1.2)$$

A definição de

$$Z_j = Re_{\delta_2} \cdot \delta_2 \quad (7.1.3)$$

$$Z_E = Re_{\delta_2} \cdot \delta_3 \quad (7.1.4)$$

permite após a consideração de que

$$\frac{dZ_j}{dx} = \frac{d Re_{\delta_2}}{dx} \cdot \delta_2 + Re_{\delta_2} \frac{d\delta_2}{dx} \quad (7.1.5)$$

$$\frac{dZ_E}{dx} = \frac{d Re_{\delta_2}}{dx} \cdot \delta_3 + Re_{\delta_2} \frac{d\delta_3}{dx} \quad (7.1.6)$$

obter-se as equações seguintes, equações diferenciais lineares de primeira ordem [1] a que se acrescenta a Equação diferencial linear de primeira ordem da Energia Total (Apêndice IV).

$$\frac{dZ_j}{dx} + G_j Z_j - F_j = 0 \quad (6.1.1)$$

$$\frac{dZ_E}{dx} + G_E Z_E - F_E = 0 \quad (6.1.2)$$

$$\frac{dZ_H}{dx} + G_H Z_H - F_H = 0 \quad (2.6.65)$$

Aqui, a aplicação ao fluido newtoniano ($n=1$) nos permite as seguintes definições:

$$G_j = 4 \cdot \frac{1}{U_\delta} \cdot \frac{dU_\delta}{dx} \quad (7.1.7)$$

$$F_j = 2\alpha - 2\chi - Z_j \frac{1}{U_\delta} \cdot \frac{dU_\delta}{dx} \cdot \left(2 \frac{\delta_1}{\delta_2} - 2M_\delta^2 - 1 \right) \quad (7.1.8)$$

$$G_E = 4 \cdot \frac{1}{U_\delta} \cdot \frac{dU_\delta}{dx} \quad (7.1.9)$$

$$F_E = 2\beta - \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} + 1 \right) \cdot \chi + \frac{\delta_3}{\delta_2} \left[\left(\alpha - Z_j \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} \right) \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + 2 \frac{\delta_4}{\delta_3} - 2M_\delta^2 \right) \right] \quad (7.1.10)$$

$$G_H = \frac{\alpha - \chi}{Z_j} + \frac{1}{T_\delta} \frac{dT_\delta}{dx} - \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} \left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \quad (7.1.11)$$

$$F_H = \frac{1}{Z_j} \left\{ \frac{\alpha}{Pr_0} \left[r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \theta + Kx \right] + \chi \left[\frac{K-1}{2} M_\delta^2 (r(1-\theta) - 1) \right] \right\} \quad (7.1.12)$$

Com a consideração da condição de compatibilidade (2.4) e do parâmetro de sucção (2.5) e, com as definições de $\alpha(x)$, $\Gamma(x)$ e Z_j , obtemos desprezando $(\alpha(x))^2 \cdot w$.

$$\Gamma(x) = \chi \cdot \alpha(x) + Z_j \cdot \frac{1}{U_\delta} \cdot \frac{dU_\delta}{dx} \quad (7.1.13)$$

que, junto com (6.1.1), (6.1.2) e (2.6.65) constituem o sistema de equações a ser resolvido, pois a obtenção de Z_H implica no cálculo de Z_j e a verificação do resultado é feita com a relação Z_E/Z_j .

As equações em Z são equações diferenciais ordinárias

de 1.^a ordem do tipo equação Bernouilli, para o caso geral de fluido não newtoniano (1.2), de expressão algébrica

$$\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = g(x) y^n \quad (7.1.14)$$

VII.2 - Método de Solução.

A equação de Bernouilli aplicável ao caso hidrodinâmico tem forma

$$\frac{dz}{dx} + b \cdot Z \cdot \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} - a = 0 \quad (7.1.15)$$

com solução geral (Apêndice III)

$$Z(x) = Z(x_0) \cdot \left[\frac{U_\delta(x_0)}{U_\delta(x)} \right]^b + a \cdot \frac{\int_{x_0}^x [U_\delta(x)]^b dx}{[U_\delta(x)]^b} \quad (7.1.16)$$

$Z(x)$ pode, então, ser calculado como função da distância x a um ponto em que seu valor é conhecido como é por exemplo, o ponto de estagnação, para um escoamento externo arbitrário $U_\delta(x)$. Com base na solução geral é possível desenvolver um processo iterativo com a seguinte relação de recorrência, em que os valores com índice (i) são os valores conhecidos e os valores com índice $(i+1)$ são os calculados.

$$\frac{Z_{i+1}}{Z_i} = \left[\frac{U_{\delta_i}}{U_{\delta_{i+1}}} \right]^b + \frac{a}{Z_i} \cdot \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} [U_\delta(x)]^b dx}{U_{\delta_{i+1}}} \quad (7.1.17)$$

Na consideração da solução geral da Equação de Bernouilli, os coe-

ficientes a e b devem ser constantes. Para aplicação, devemos pois obter valores médios de F_j e F_E pois estes valores são os valores de a nas duas equações dadas.

Utilizando a definição de $\Gamma(x)$ dada em (7.1.13) podemos escrever os valores de \bar{F}_j e \bar{F}_E como abaixo:

$$\bar{F}_j = 2\alpha - 2\chi - (\Gamma - \alpha\chi) \left(2 \frac{\delta_1}{\delta_2} - 2M_{\delta}^2 - 1 \right) \quad (7.1.18)$$

$$\bar{F}_E = 2\beta - \left(\frac{\delta_3}{\delta_2} + 1 \right) \chi + \frac{\delta_3}{\delta_2} \left[\alpha - (\Gamma - \alpha\chi) \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + 2 \frac{\delta_4}{\delta_2} - 2M_{\delta}^2 \right) \right] \quad (7.1.19)$$

Estas funções são universais e dependem do perfil de velocidades.

A escolha do intervalo $x_{i+1} - x_i$ pode ser tão pequena quanto necessário e o trabalho de FIGUEIREDO [1] mostrou ser boa a aproximação sugerida por WALZ [19] de se escolher tal intervalo que

$$0.97 \leq \frac{U_{\delta_{i+1}}}{U_{\delta_i}} \leq 1.03 \quad (7.1.20)$$

A estimativa inicial dos valores $\frac{\delta_3}{\delta_2}$, $\Gamma(x)$ e χ deve ser feita e após cálculo do valor para o ponto x_{i+1} ele é verificado pela relação

$$\frac{\delta_3}{\delta_2} = \frac{Z_{E_{i+1}}}{Z_{j_{i+1}}} \quad (7.1.21)$$

Aplicado ao caso da Energia Total, a equação tem a forma

$$\frac{dZ_H}{dx} + G_H \cdot Z_H - F_H = 0 \quad (2.6.65)$$

com a solução geral (Apêndice III)

$$\frac{Z_{H_i}}{Z_{H_0}} = A_H + \frac{\bar{F}_H}{Z_{H_0}} \cdot B_H \quad (7.1.22)$$

Nela, temos as seguintes definições:

$$A_H = \left[\frac{U\delta_{i+1}}{U\delta_i} \right]^{\left(1 + \frac{\bar{\delta}_1}{\delta_2}\right)} \times \left[\frac{T\delta_i}{T\delta_{i+1}} \right] \times e^{\left(\frac{\bar{\alpha} - \bar{X}}{Z_j}\right) (x_i - x_{i+1})} \quad (7.1.23)$$

$$\bar{F}_H = \frac{1}{Z_j} \left\{ \frac{\alpha}{P_r} \left(r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \theta + Kx \right) + \bar{X} \left(((1-\theta) \cdot r - 1) \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \right) \right\} \quad (7.1.24)$$

$$B_H = \frac{\phi}{\frac{\left(\frac{\bar{\alpha} - \bar{X}}{Z_j}\right) \cdot x_{i+1}}{T\delta_{x_{i+1}} \cdot e} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\bar{\delta}_1}{\delta_2}\right)} \cdot U\delta_{x_{i+1}}} \quad (7.1.25)$$

$$\phi = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{T\delta_x \cdot e^{\left(\frac{\bar{\alpha} - \bar{X}}{Z_j}\right) \cdot x}}{U\delta_x \left(1 + \frac{\bar{\delta}_1}{\delta_2}\right)} \cdot dx \quad (7.1.26)$$

O conhecimento de Z_j dado pela equação da quantidade de movimento permite o cálculo de \bar{F}_H e a resolução da equação (7.1.22).

CAPÍTULO VIII

MÉTODO COMPUTACIONALVIII.1 - Funções para Iteração.

Para a resolução do problema do perfil de velocidade do fluido incompressível [1], foram escolhidos como parâmetros de forma do perfil as quantidades H_{32} , Γ e χ

A cada incrementos Δx os mesmos são calculados iterativamente. Os resultados obtidos por FIGUEIREDO [1], confirmam as sugestões de WALZ [19] de que a convergência era garantida para Δx tal que

$$\left| H_{32_{i+1}} - H_{32_i} \right| \leq 5.10^{-3} \quad (8.1.1)$$

Valores médios dos parâmetros de forma são considerados após cada incremento. Conforme verificado na determinação dos valores δ_1 , δ_2 e δ_3 , eles são funções de relações designadas por F_1 , F_2 e F_3 , relações estas funções de ε , γ , Γ , e χ . Obtêm-se, então:

$$\frac{\delta_1}{\delta} = F_3 \quad (8.1.2)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = F_3 - F_1 \quad (8.1.3)$$

$$\frac{\delta_3}{\delta} = 2F_3 - 3F_1 + F_2 \quad (8.1.4)$$

e da consideração dos valores de $\frac{\delta_3}{\delta}$ e $\frac{\delta_2}{\delta}$ obtêm-se a relação

$$H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2} = \frac{2F_3 - 3F_1 - F_2}{F_3 - F_1} \quad (8.1.5)$$

a determinação de $\varepsilon(x)$ e $\gamma(x)$ exige a formação de um sistema de equações não lineares a saber

$$P = F_2 - F_1 + (2 - \overline{H_{32}}) \cdot \frac{\overline{\delta_2}}{\delta} = 0 \quad (8.1.6)$$

e

$$Q = F_3 - F_1 - \frac{\overline{\delta_2}}{\delta} = 0 \quad (8.1.7)$$

Resolvendo o sistema

$$P = f(\varepsilon, \gamma) \quad (8.1.8)$$

$$Q = f(\varepsilon, \gamma) \quad (8.1.9)$$

obtemos $\varepsilon(x)$ e $\gamma(x)$.

No caso do escoamento de fluido compressível com troca de calor, os valores de δ_1 , δ_2 , δ_3 e δ_4 são função do perfil de velocidades como no caso incompressível mas também função do perfil de temperatura pela relação

$$\frac{\rho_\delta}{\rho} = \frac{T}{T_\delta} = A + (B+Kx)\left(\frac{u}{u_\delta}\right) + (C-Kx)\left(\frac{u}{u_\delta}\right)^2 \quad (8.1.10)$$

Quando considerados nas integrais de definição das espessuras de perda de momentum, de energia, etc, estas integrais não apresentam solução analítica como no caso incompressível [1]. Neste caso, a sua resolução foi feita por quadratura utilizando-se

a fórmula de Simpson.

Para manter o mesmo encaminhamento do problema incom -
pressível e torná-lo um caso particular do nosso trabalho, desen-
volvemos δ_1 , δ_2 , δ_3 e δ_4 conforme segue:

δ_1 , espessura de perda de velocidade:

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta} \right) d\eta = \int_0^1 \left(1 - \frac{\frac{u}{U_\delta}}{\frac{T}{T_\delta}} \right) d\eta \quad (8.1.11)$$

δ_2 , espessura de perda de momentum:

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta} \left(1 - \frac{u}{U_\delta} \right) d\eta = \int_0^1 \frac{\frac{u}{U_\delta} - \left(\frac{u}{U_\delta} \right)^2}{\frac{T}{T_\delta}} d\eta \quad (8.1.12)$$

δ_3 , espessura de perda de energia:

$$\frac{\delta_3}{\delta} = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta} \left(1 - \frac{u}{U_\delta} \right)^2 d\eta = \int_0^1 \frac{\frac{u}{U_\delta} - \left(\frac{u}{U_\delta} \right)^3}{\frac{T}{T_\delta}} d\eta \quad (8.1.13)$$

δ_4 , espessura de perda de densidade:

$$\frac{\delta_4}{\delta} = \int_0^1 \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta} \left(\frac{\rho_\delta}{\rho} - 1 \right) d\eta = \int_0^1 \left(\frac{u}{U_\delta} - \frac{\frac{u}{U_\delta}}{\frac{T}{T_\delta}} \right) d\eta \quad (8.1.14)$$

Estes valores são função das relações que designamos por:

$$\frac{\delta_1}{\delta} = F_3 \quad (8.1.15)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = F_3 - F_1 + F_0 \quad (8.1.16)$$

$$\frac{\delta_3}{\delta} = 2 \cdot F_3 - 3 \cdot F_1 + F_2 + 2F_0 \quad (8.1.17)$$

$$\frac{\delta_4}{\delta} = F_4 \quad (8.1.18)$$

sendo estas relações definidas conforme abaixo; tendo em vista manter o caso incompressível como um caso particular do presente:

$$F_3 = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{Fc8(\eta)} + \frac{Fc7(\eta)}{Fc8(\eta)} \right) d\eta \quad (8.1.19)$$

$$F_2 = \int_0^1 \frac{Fc7(\eta)^3}{Fc8(\eta)} d\eta \quad (8.1.20)$$

$$F_1 = \int_0^1 \frac{Fc7(\eta)^2}{Fc8(\eta)} d\eta \quad (8.1.21)$$

$$F_0 = \int_0^1 \left(\frac{1}{Fc8(\eta)} - 1 \right) d\eta \quad (8.1.22)$$

$$F_4 = \int_0^1 \left(1 - Fc7(\eta) - \frac{1}{Fc8(\eta)} + \frac{Fc7(\eta)}{Fc8(\eta)} \right) d\eta \quad (8.1.23)$$

em que

$$Fc7(\eta) = (1-\eta)^T (1 - EK + A_1 \eta + A_2 \eta^2 + A_3 \eta^3) \quad (8.1.24)$$

$$Fc8(\eta) = A + (B+Kx) [1 - Fc7(\eta)] + (C-Kx) [1 - Fc7(\eta)]^2 \quad (8.1.25)$$

Da consideração dos valores de $\frac{\delta_3}{\delta}$ e $\frac{\delta_2}{\delta}$ obtêm-se a relação

$$H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta} = \frac{2(F_3 - F_1 + F_0) - F_1 + F_2}{F_3 - F_1 + F_0} \quad (8.1.26)$$

que, com a consideração de $\frac{\delta_2}{\delta}$ nos fornecerá o sistema de equações não lineares

$$P = F_2 - F_1 + (2 - \overline{H_{32}}) \cdot \frac{\overline{\delta_2}}{\delta} = 0 \quad (8.1.27)$$

$$Q = F_3 - F_1 + F_0 - \frac{\overline{\delta_2}}{\delta} \quad (8.1.28)$$

Neste sistema de equações temos que

$$\frac{\overline{\delta_2}}{\delta} = \left(\frac{\overline{\Gamma}}{\delta} \right)^{1/2} \quad (8.1.29)$$

e

$$H_{32} = \left(\frac{\overline{\delta_3}}{\delta_2} \right) \quad (8.1.30)$$

são os valores definidos para o caso do perfil de velocidades no escoamento incompressível [1] e que serão corrigidos para o caso do fluido compressível segundo correção sugerida por WALZ [19], a saber:

$$\Gamma = \Gamma \cdot \phi \quad (8.1.31)$$

$$H_{32} = H_{32} \cdot \psi \quad (8.1.32)$$

$$\phi = 1/1 + r \frac{K-1}{2} M_{\delta}^2 \left[H_{32} \cdot \psi - \theta \right] \left[2 - H_{32} \cdot \psi \right] \quad (8.1.33)$$

$$\psi = 1 + \frac{(\psi_{12} - 1) M_{\delta}}{M_{\delta} + \frac{\psi_{12} - 1}{\psi_0'}} \quad (8.1.34)$$

$$\psi_{12} = a - b\theta \quad (8.1.35)$$

$$\psi_0' = 0.0144(2 - H_{32})(2 - \theta)^{0,8} \quad (8.1.36)$$

$$a = 1.18 \quad (8.1.37)$$

$$b = 1.08 \quad (8.1.38)$$

Deste modo podemos determinar o sistema de Equações não lineares

$$P = f(\epsilon, \gamma) = 0 \quad (8.1.39)$$

$$Q = f(\epsilon, \gamma) = 0 \quad (8.1.40)$$

sendo os valores ϵ e γ , como no caso incompressível, obtidos a partir dos valores iniciais da solução de Hartree e determinados iterativamente na resolução do sistema de equações não lineares $P = 0$ e $Q = 0$.

VIII. 2 - Valores Iniciais.

O método de resolução pressupõe o conhecimento de um valor imediatamente anterior para cálculo do valor seguinte. É possível iniciar o problema com o conhecimento de valores no pon

to de estagnação, onde $Z_{j(0)} = 0$ $Z_{E(0)} = 0$ e $Z_{H(0)} = E_{(0)}$. Sendo $E_{(0)}$ dado por:

$$E_{(0)} = - Kx \cdot (H_{32} - 1) \quad (8.2.1)$$

O valor de temperatura no ponto de estagnação é previsto, função da velocidade do fluído e da temperatura do mesmo.

Os valores dos parâmetros do perfil de velocidade são os considerados no trabalho incompressível [1] com a correção mencionada (8.1).

VIII.3 - Condição Final.

A condição final será aquela em que o perfil não mais pode ser considerado como de um escoamento laminar. Ela é dada por

$$\alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{u_{\delta}} \bigg|_{y=0} \leq 0 \quad (8.3.1)$$

ou

$$\alpha = \epsilon \cdot \left(\frac{\delta_2}{\delta} \right) \leq 0 \quad (8.3.2)$$

quando o perfil é perpendicular à parede, a partir do qual começa a existir um fluxo no sentido inverso e o descolamento da camada.

VIII.4 - Processo de Iteração.

Para fins de computação do problema, foram considerados pequenos intervalos da variável \underline{x} sobre a superfície do cilindro e dentro destes intervalos, foram calculados valores médios dos diversos parâmetros do escoamento e da temperatura.

As equações foram resolvidas com a consideração do conhecimento do valor imediatamente anterior e foi verificado, dentro de cada intervalo da variável \underline{x} , qual o valor de Kx que igualava as duas equações da Energia (Z_H), a obtida da relação algébrica (2.6.62) e a da equação diferencial (2.6.65) denominadas E_c e E_b respectivamente.

Aqui, a exemplo do parâmetro H_{32} , verificou-se ser boa a aproximação

$$\left| E_{c_{i+1}} - E_{b_{i+1}} \right| \leq 0,001$$

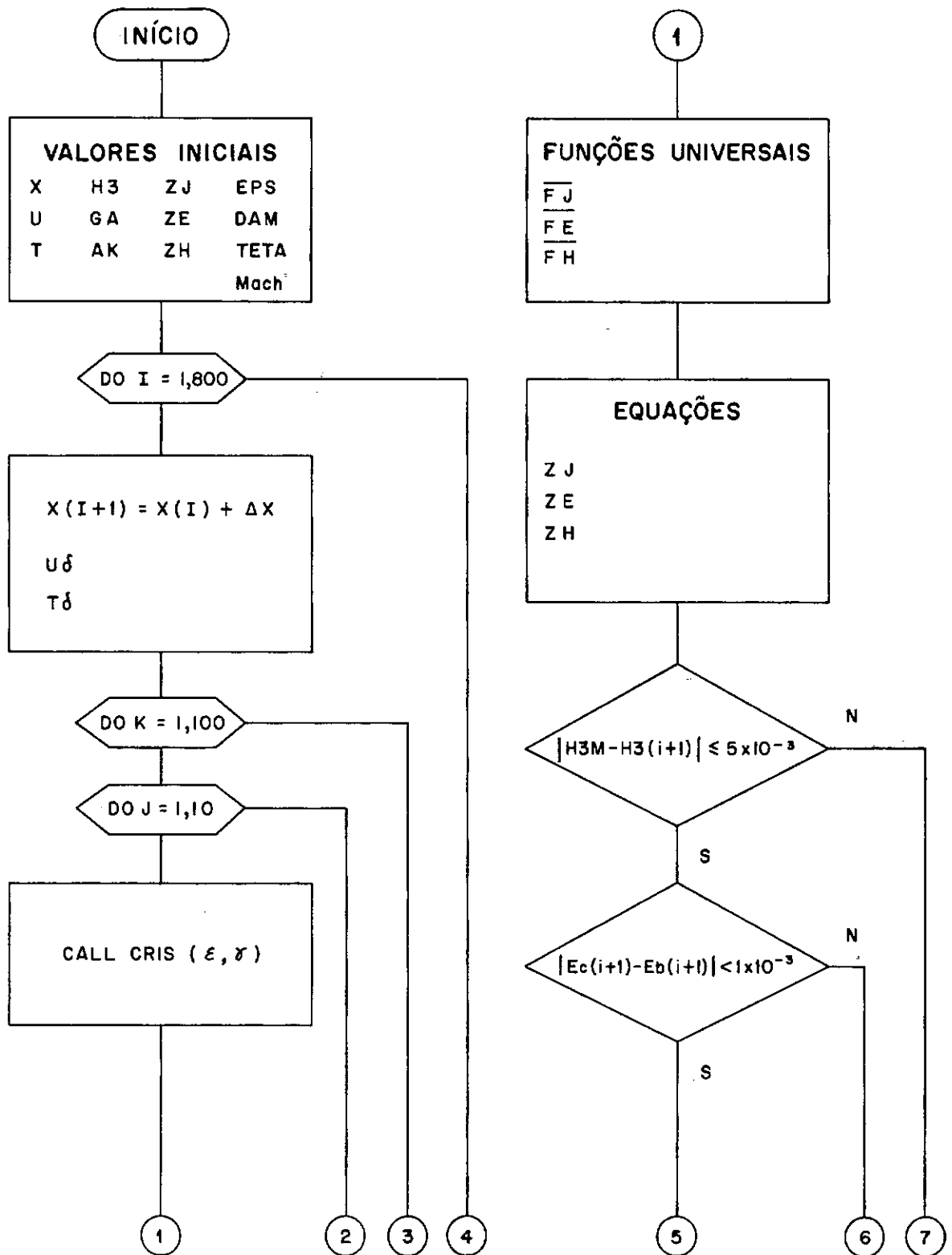


FIG. (8.1 - A) - ESQUEMA DO PROCESSO DE ITERAÇÃO

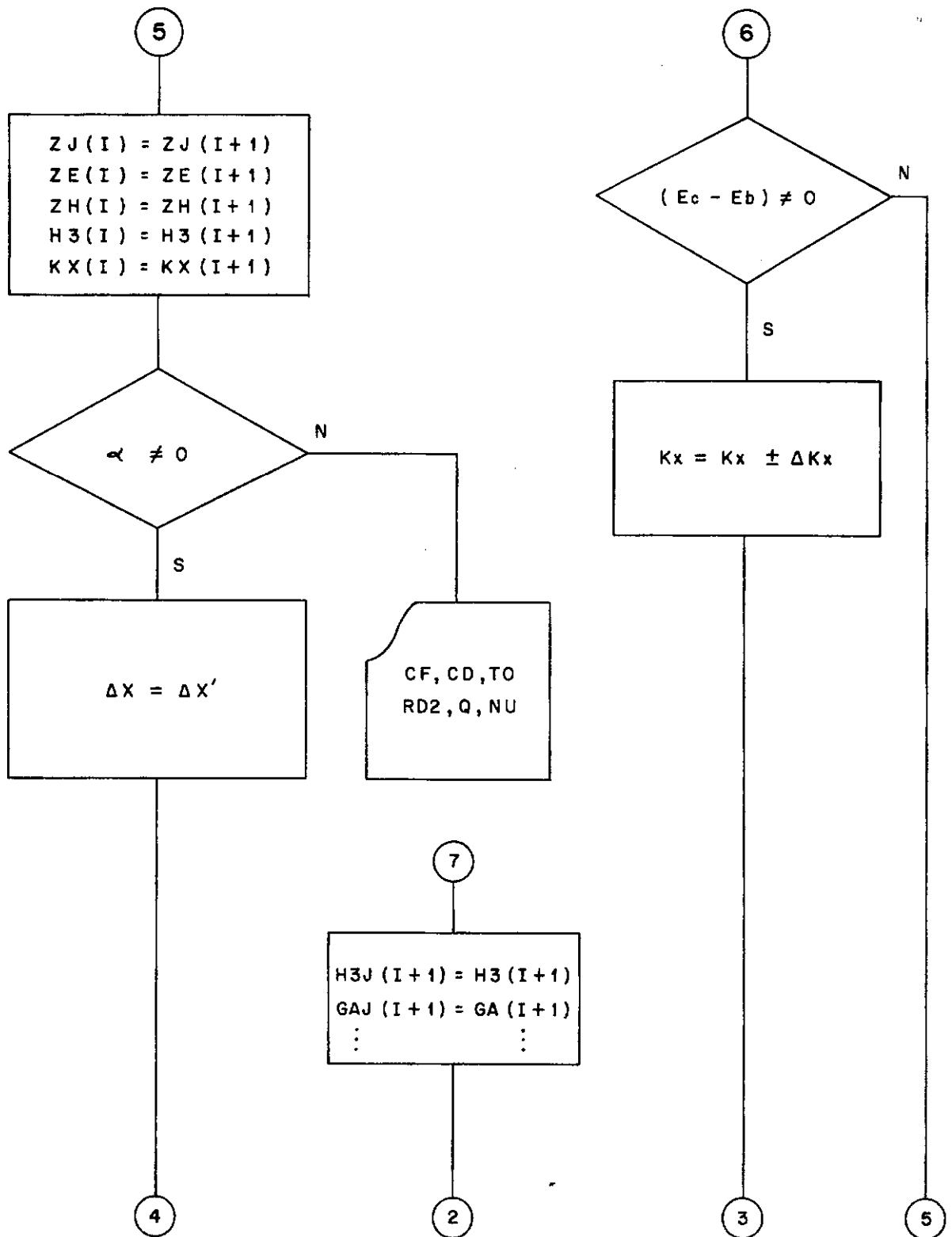


FIG. (8.1 - B) - ESQUEMA DO PROCESSO DE ITERAÇÃO

CAPÍTULO IX

CONCLUSÕES

IX.1 - Resultados e Discussão.

O presente trabalho consistiu na solução da equação da energia térmica para a camada limite pelos métodos integrais e a sua aplicação ao cálculo da transferência de calor e outras grandezas do escoamento no caso em que se acham presentes gradientes de pressão adverso. Para tal foram arbitrados números de Mach para o escoamento compressível e escolhidas faixas para o parâmetro de transferência de calor θ dentro das inúmeras possibilidades que o caso real apresenta. Foram selecionadas duas faixas de valores para θ e verificado o comportamento da transferência de calor e demais grandezas para estas faixas. Os resultados se encontram nos gráficos que se seguem. Verificou-se que a convergência da solução se torna difícil para maiores valores de Mach sendo necessário inúmeras iterações para o estabelecimento dos valores corretos de ϵ e γ que resolvam as equações com determinado K_x que preencha a precisão requerida. Estes valores estão relacionados na Tabela 9.1.

Foram utilizados os perfis de velocidade externa dado pela experiência e perfil de temperaturas externa função da velocidade externa, sendo usado como fator de proporcionalidade os valores $c = 1$ para $Mach = 0.2$ e os decorrentes da consideração

Nº de Mach	Interação	ε	γ	θ
0.2	1	7.3220	35.7220	0.17350
	2	7.3250	35.5224	
	3	7.3494	35.6724	
	4	7.3494	35.6724	
0.4	1	7.6355	38.0724	0.17005
	2	7.0709	34.0224	
	3	8.2099	44.9724	
	4	7.4348	37.4224	
	5	7.4347	37.2724	
0.6	1	8.7599	49.7224	0.16460
	2	6.1074	27.2724	
	3	8.7599	50.4224	
	4	8.7599	51.1224	

TABELA 9-1 - Parâmetros ε , γ iniciais

de escoamento externo isentrópico, função do número de Mach. O perfil de velocidade externa é crescente e apresenta valor máximo nas proximidades de $\theta^0=70^\circ$ sendo decrescente a partir deste valor e se interrompendo em torno de $\theta^0=80^\circ$ visto que aí o perfil não mais é laminar e as equações não mais representam o problema estudado. O perfil de temperatura externa é de representação semelhante com representações distintas em função do fator de proporcionalidade utilizado. As figuras (9-1) e (9-2) apresentam estes perfis em função do ângulo θ^0 ou de $X^*=X/L$. A diferença de temperatura ΔT utilizada foi de $\Delta T=189^\circ\text{C}$ numa suposição e $\Delta T=40^\circ\text{C}$ em outra. A tensão de cisalhamento na parede τ_0 no caso compressível é função de U_δ/U_∞ e de ρ_δ/ρ_∞ , esta última função de $(T_\delta/T_\infty)^{1/K-1}$.

A presença do gradiente de pressão adverso afeta a tensão de cisalhamento acentuando a declividade da curva para valores superiores a $\theta^0=70^\circ$. Para valores de $\Delta T=189^\circ\text{C}$ e a consideração de ρ_δ/ρ_∞ dado pelo perfil de temperatura externa com fator de proporcionalidade $c=1$ obtemos valores máximos de τ_0 em torno de $\theta^0=62^\circ$ a partir do qual se acentua a declividade da curva. Verifica-se um deslocamento deste máximo para maiores valores de θ^0 quando comparados com o caso incompressível. Na representação da figura (9-3) temos a curva para τ_0 em função de T^* demonstrando que para os valores iniciais de θ^0 temos T_{st}/T_∞ próximo de T_δ/T_∞ sendo esta diferença proporcional à relação ρ_δ/ρ_∞ considerada. Os coeficientes de arraste e de dissipação são fortemente decrescentes no início, obtendo-se estabilização para maiores valores de θ^0 . Eles se acham representados na figura (9-3)

para valores de $\Delta T = 189^\circ\text{C}$. Deve ser observado que estes valores são função da relação $Re_{\delta_2}/Re_\infty^{1/2}$ que é proporcional à correção de variação de massa específica e de viscosidade dinâmica, ambas funções da relação de temperatura considerada. A influência do número de Mach pode ser vista na figura (9-5), onde se considera a diferença de temperatura $\Delta T = 40^\circ\text{C}$ para diferentes números de Mach.

O fluxo de calor apresenta rápida variação para valores de θ° menor que 50° devido à espessura da camada limite térmica ser muito pequena. Os valores obtidos, bem como o do número de Nusselt para $\Delta T = 189^\circ\text{C}$ e $Mach = 0.2$ se encontram representados na figura (9-4). Valores para outros números de Mach e $\Delta T = 40^\circ\text{C}$ são representados na figura (9-6). Aqui utilizou-se o perfil de escoamento externo isentrópico.

IX.2 - Conclusões e Sugestões.

A solução da equação da energia térmica pelos métodos integrais com a utilização de um perfil de velocidades polinomial de grau variável e um perfil de temperatura função do perfil de velocidades do tipo empregado por Van Driest para a placa plana e considerando por correção de seus coeficientes a influência dos gradientes de pressão adverso e de temperatura, revelou-se satisfatória para diferentes faixas de fluxo de calor e diferentes números de Mach do escoamento compressível. A aproximação obtida está dentro dos valores aceitáveis para os problemas usuais em que a utilização de um método aproximado se reve-

la de grande utilidade.

Como sugestão, recomenda-se a continuação do estudo com a aplicação do método aqui desenvolvido ao caso de maiores valores do número de Mach do escoamento do fluido compressível, sendo pesquisada a correção necessária para a consideração da existência de ondas de choque e sua interação com as camadas limites laminar de velocidade e de temperatura. De grande importância é a pesquisa da influência de dissipação viscosa nas equações. A sua consideração é apresentada como sugestão no prosseguimento do trabalho.

Sugere-se, igualmente, a aplicação do princípio dos métodos integrais como aqui desenvolvido ao caso do escoamento bifásico, considerando-se a C.L. de concentração de massa e condições de contorno para a interface. Isto feito, acreditamos que se teria abrangido os três diferentes ramos da mecânica dos fluidos que estudam os fenômenos de transporte pelos métodos integrais.

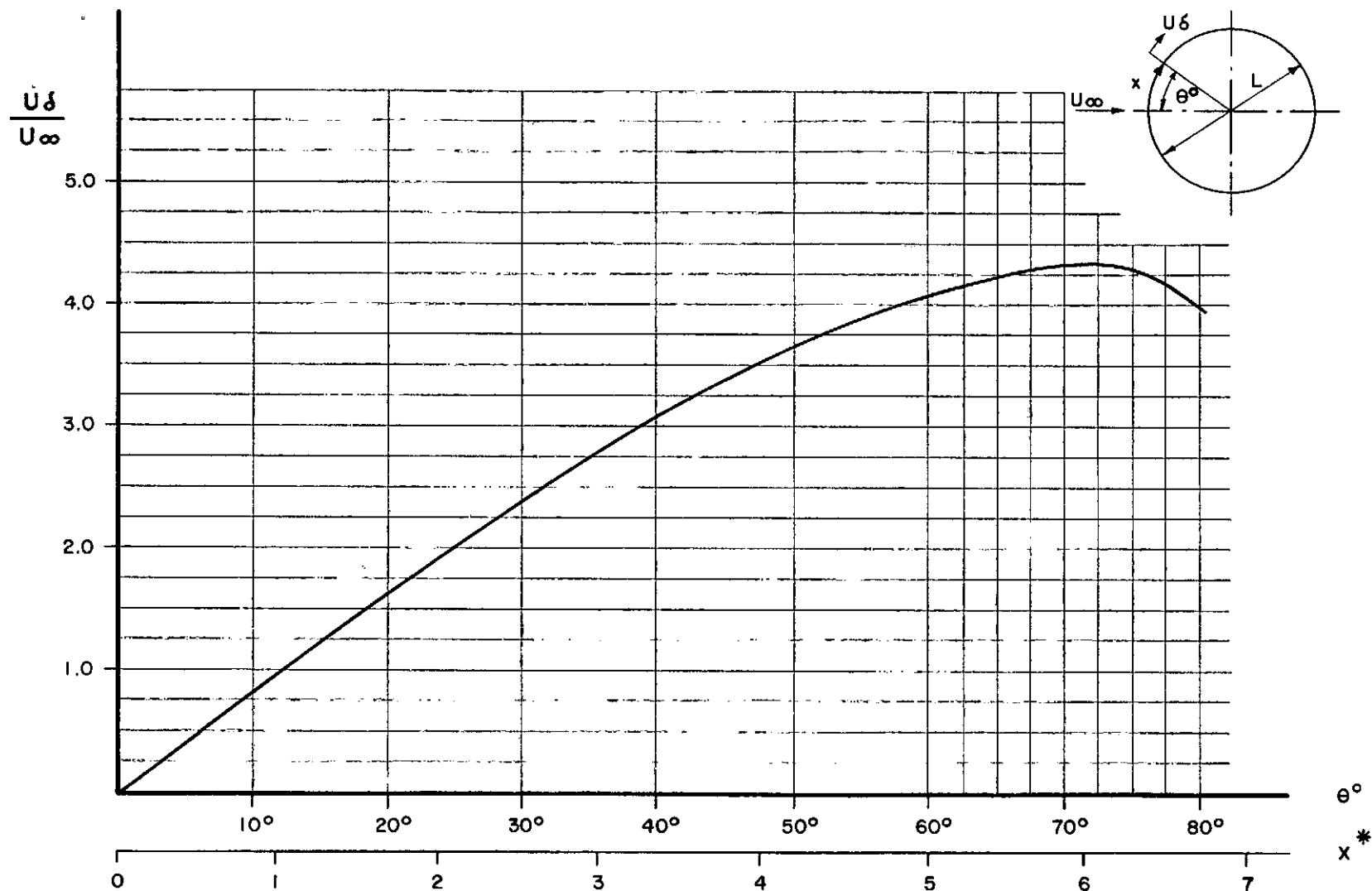


FIG. (9-1) - VELOCIDADE NA EXTREMIDADE DA CAMADA LIMITE $U_\delta / U_\infty = f\left(\frac{x}{L}\right)$

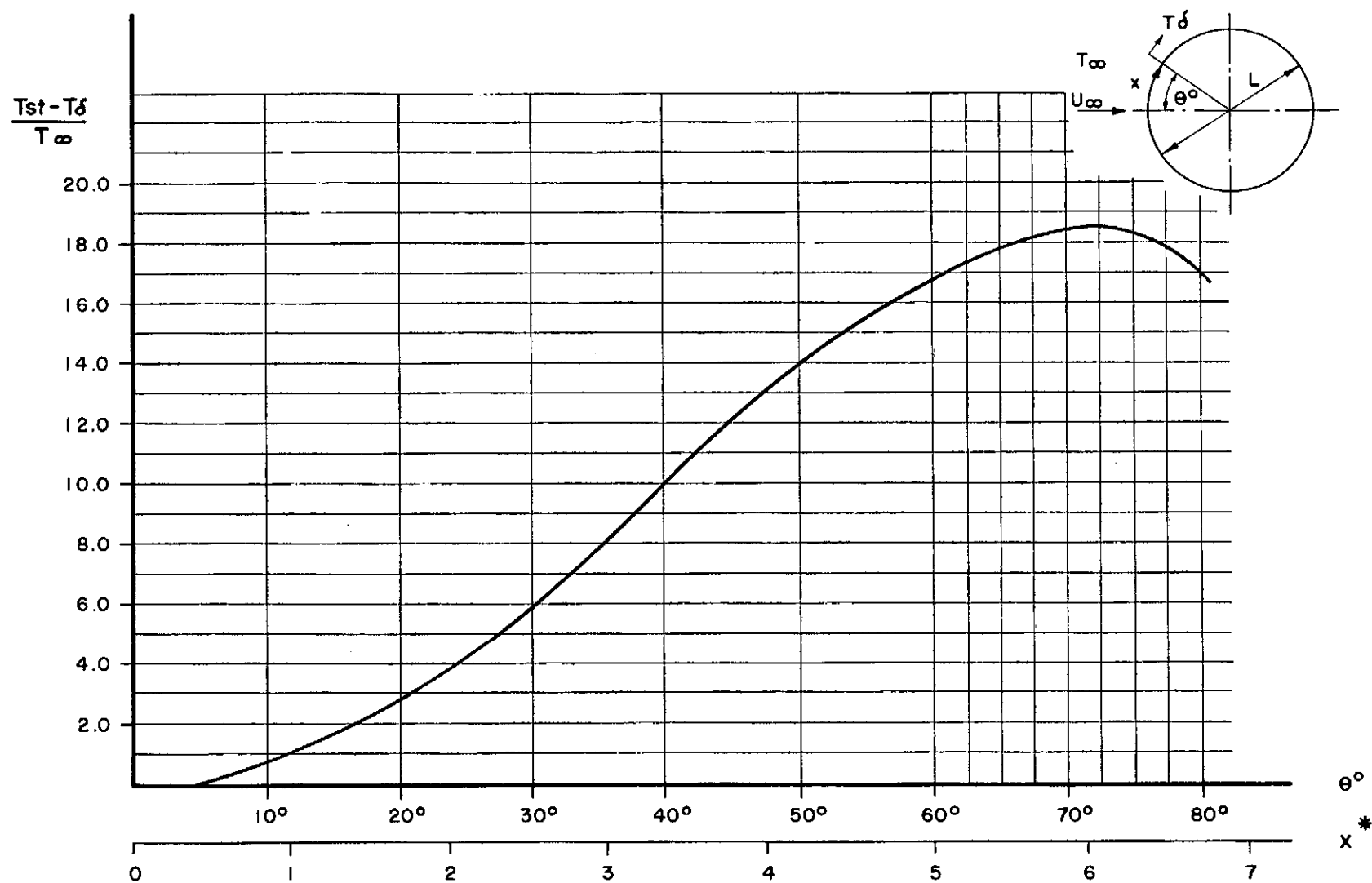


FIG.(9-2) TEMPERATURA NA EXTREMIDADE DA CAMADA LIMITE

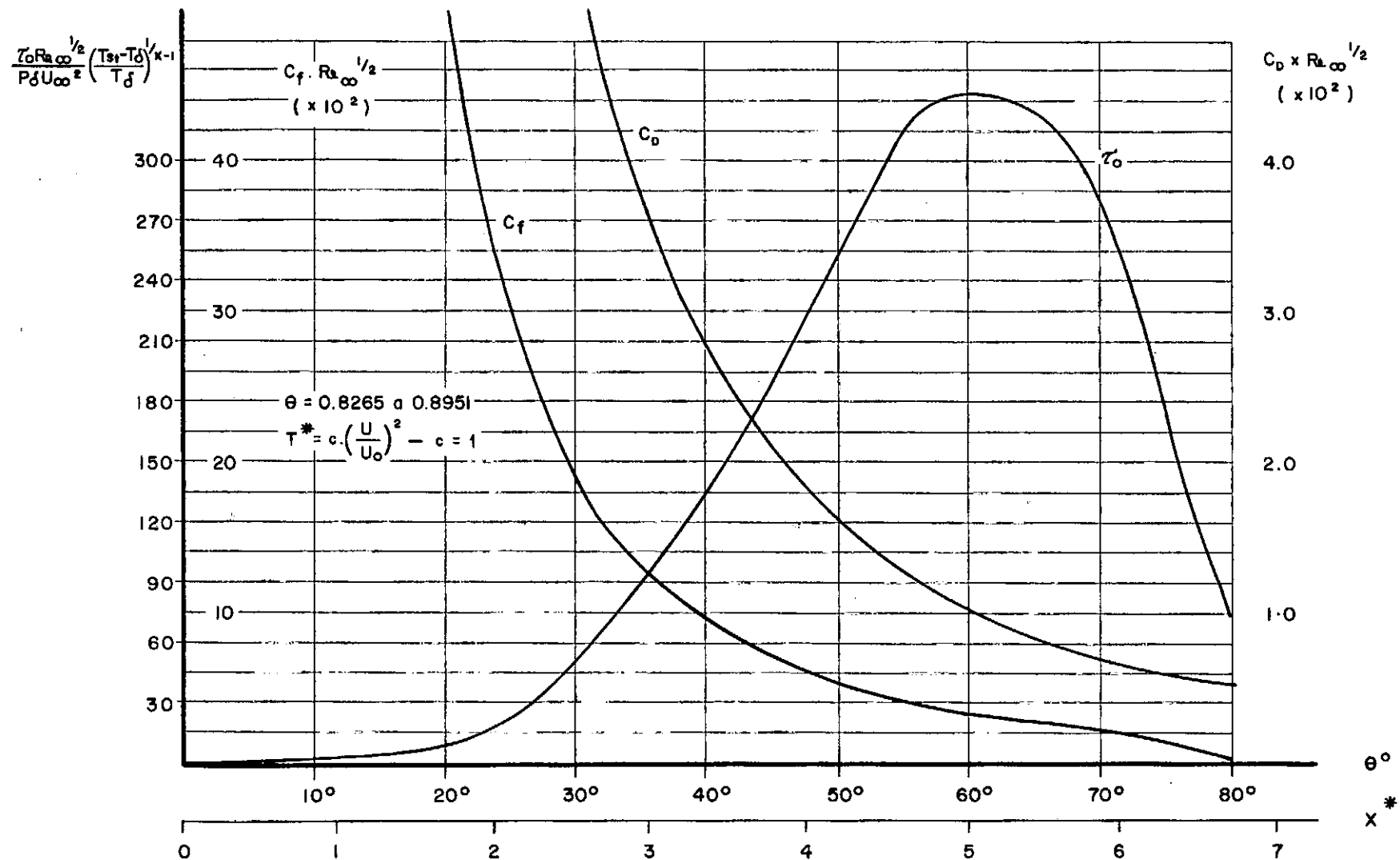


FIG. (9-3) - COEFICIENTES DE ARRASTE E DISSIPAÇÃO E TENSÃO DE CIZALHAMENTO

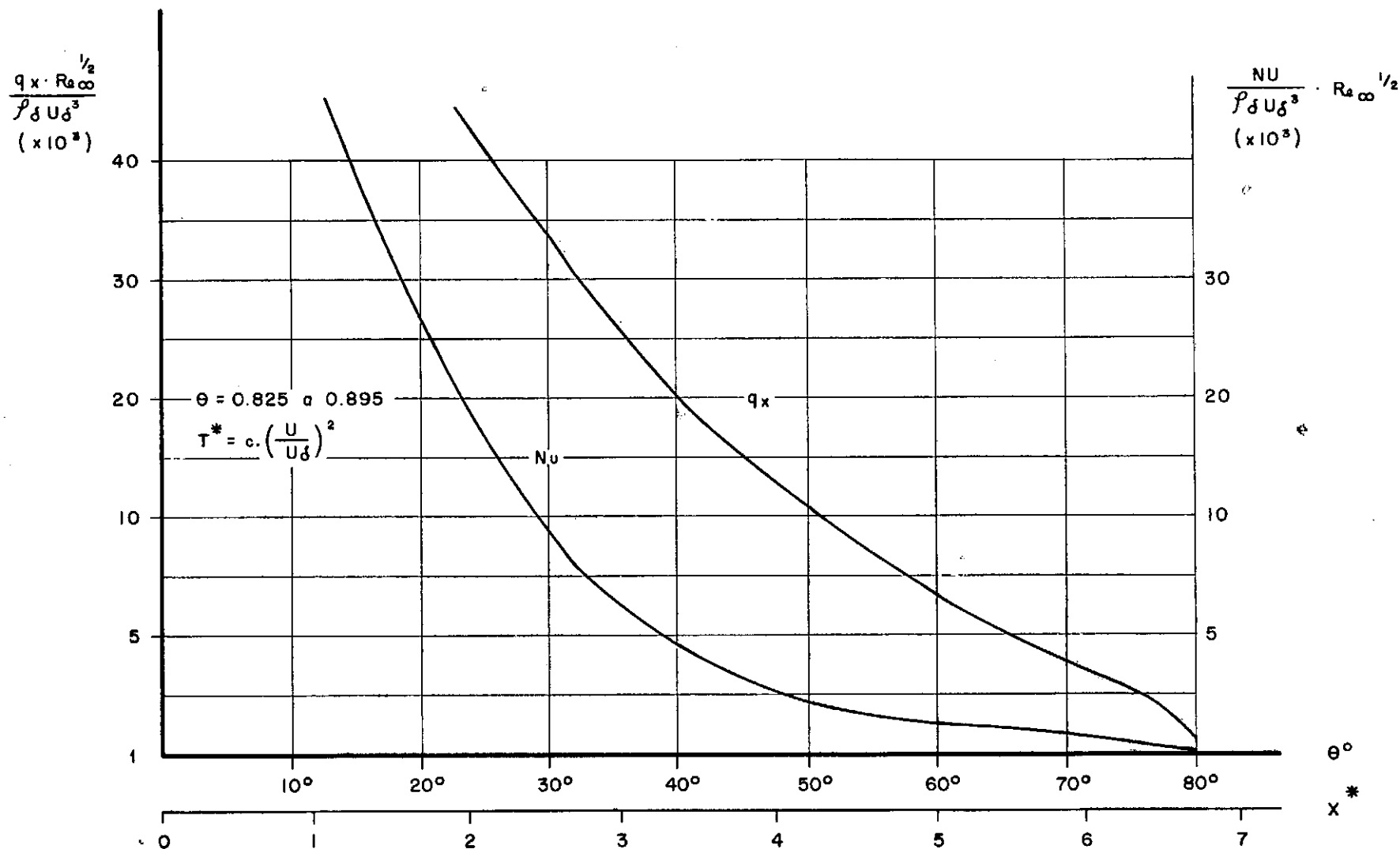


FIG. (9-4) - FLUXO DE CALOR E NÚMERO DE NUSSELT - MACH = 0.2

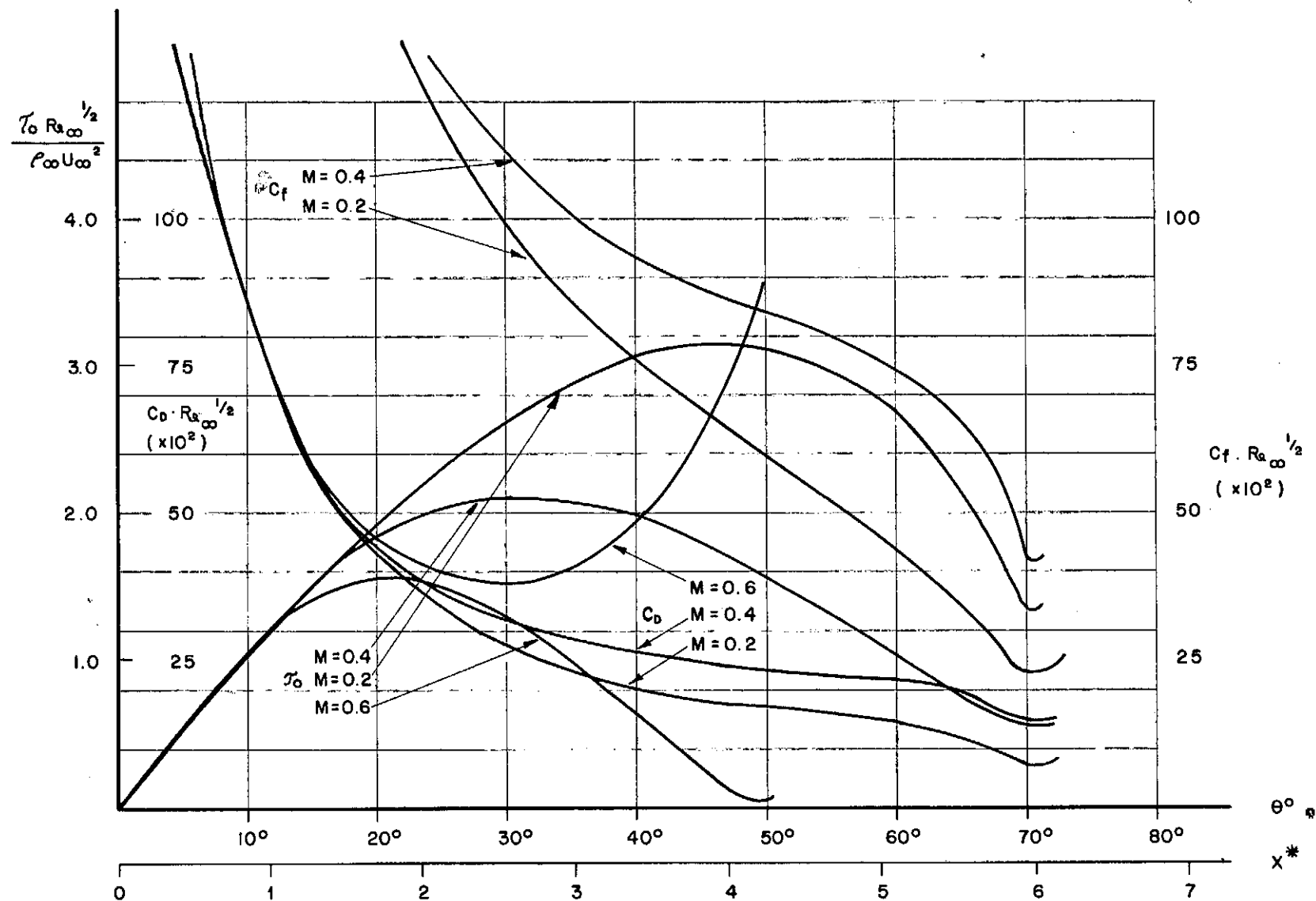


FIG.(9-5) - COEFICIENTE DE ARRASTE E DISSIPAÇÃO E TENSÃO DE CIZALHAMENTO

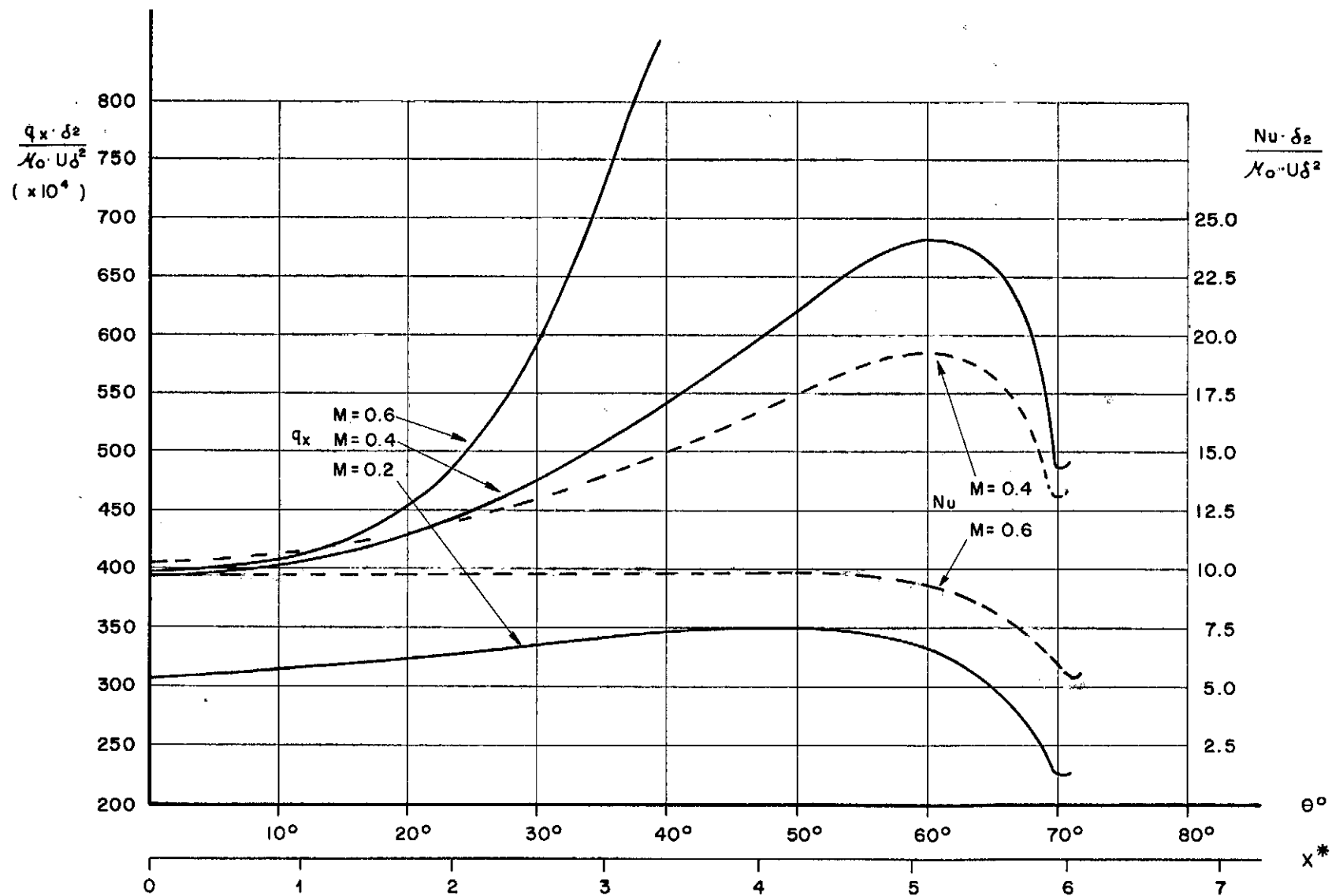


FIG. (9-6) - FLUXO DE CALOR E NÚMERO DE NUSSELT

BIBLIOGRAFIA

- [1] FIGUEIREDO, A.M.D., "Camada Limite com Sucção e Gradiente de Pressão em Fluídos Não Newtonianos", Tese, COPPE, 1974.
- [2] STEWARTSON, K., "The Theory of Laminar Boundary Layers in Compressible Fluids", Claredon Press, Oxford, 1964.
- [3] BIRD, R.B., STEWART, W.E. e LIGHTFOOT, E.M., "Transport Phenomena", John Wiley, N.York, 1960.
- [4] PRANDTL, L., "Verhandl. d.III Intern. Math. Kongr", Heidelberg, 1904.
- [5] GEROPP, D., "Näherungstheorie für Kompressible Laminare Grenzschichten mit zwei Formparametern für das Geschwindigkeitsprofil", Dissertation, Karlsruhe, 1963.
- [6] GOLDSTEIN, S., "Modern Developments in Fluid Mechanics", Dover Publications, Inc., vol.I, 1965.
- [7] GOLDSTEIN, S., "Modern Developments in Fluid Mechanics", Dover Publications, Inc., vol. II, 1965.
- [8] LOITSIANSKII, L.G., "Laminare Grenzschichten" Akademie-Verlag, Berlin, 1967.
- [9] LOITSIANSKII, L.G., "Mechanics of Liquids and Gases", Pergamon Press, London, 1966.
- [10] SPALDING, D.B., "Heat Transfer from Surfaces of Non-Uniform Temperature," Journal of Fluid Mechanics, 4, Part 1, pp. 22-32, 1958.

- [11] SPALDING, D.B. e PUN, W.M., "A Review of Methods for Predicting Heat-Transfer Coefficients for Laminar Uniform-Property Boundary Layer Flows", Int. J. Heat Mass Transfer, 5, pp. 239-249, 1962.
- [12] SCHLICHTING, H., "Boundary-Layer Theory", Mc Graw-Hill Book Co., 6th Edition, 1968.
- [13] SCHMAL, M., "Eine Näherungslösung für die Kondensation von Laminar Strömenden Dampf mit Beliebigen Druckgradienten bei Bleiner Mach-Zahl und Konstanten Stoffverten", Int. J. Mass Transfer, 15, 5, pp. 1137-1157, 1972.
- [14] FAND, R.M., "Heat Transfer by Forced Convection from a Circular Cylinder to Water in Cross Flow", Int. J. Heat Mass Transfer, vol.8, pp. 995-1010, 1965.
- [15] KOH, J.C.Y. e HARTNETT, J.P., "Skin Friction and Heat Transfer for Incompressible Laminar Flow over Porous Wedges with Suction and Variable wall Temperature," Int. J. Heat Mass Transfer, vol.2, pp. 185-198, 1961.
- [16] PERKINS, Jr., H.C. e LEPPERT, G., "Local Heat Transfer Coefficients on a Uniformly Heated Cylinder", Int. J. Heat Mass Transger, vol.7, pp. 143-158, 1964.
- [17] MERK, H.J., "Rapid Calculation for Boundary-Layer Transfer using Wedge Solutions and Asymptotic Expantions", Journal of Fluid Mechanics, 5, part 3, pp.460-480, 1959.
- [18] MORDUCHOW, M. e REYLE, S.P., "On The Compressible Laminar Boundary-Layer with Suction", Int. J. Heat Mass Transfer, vol.10, pp. 1233-1254, 1967.

- [19] WALZ, A., "Boundary-Layers of Flow and Temperature", The M. I.T. Press, Massachusetts, 1969.
- [20] POOTS, G. e RAGGETI, G.F., "Theoretical Results for Variable Property, Laminar Boundary-Layers in Water", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 10, pp. 597-610, 1967.

NOMENCLATURA

- A - Parâmetro na equação do perfil de temperaturas definido por (2.6.33)
- A_1, A_2, A_3 - Coeficientes do perfil de velocidades
- B - Parâmetro na equação do perfil de temperatura definido por (2.6.34)
- C - Parâmetro na equação do perfil de temperatura definido por (2.6.35)
- C_D - Coeficiente de dissipação definido pela eq. (2.6.14)
- C_f - Coeficiente de arraste definido pela eq. (2.6.9)
- C_p - Coeficiente de calor específico à pressão constante (C_{pm} = valor médio)
- C_v - Coeficiente de calor específico a volume constante
- E_c - Número de Eckert (E_{cm} = valor médio)
- e_v - Parâmetro da equação diferencial ordinária definido por (2.6.5)
- E - Definido pela eq. (2.6.40)
- E_c - Equação da comparação
- E_b - Equação básica
- F_r - Número de Froude
- f_v - Parâmetro da equação diferencial ordinária, definido

por (2.6.6)

- F - Definido pela equação (2.6.41)
- F_H - Definido pela equação (2.6.63)
- f_1, f_2 - Funções no perfil de temperatura
- F_j - Parâmetro da equação diferencial ordinária da quantidade de movimento (7.1.1)
- F_E - Parâmetro da equação diferencial ordinária da energia mecânica (7.1.10)
- g - Constante gravitacional
- g_v - Parâmetro da equação diferencial ordinária, definido por (2.6.7)
- G - Definido pela equação (2.6.39)
- G_H - Definido pela equação (2.6.62)
- G_j - Parâmetro da equação diferencial ordinária da quantidade de movimento (7.1.7)
- G_E - Parâmetro da equação diferencial ordinária da Energia mecânica (7.1.9)
- H_{32} - Parâmetro de forma do perfil de velocidade
- h_v - Parâmetro da equação diferencial ordinária, definido por (2.6.4)
- h - Entalpia definida pela equação (2.6.24)
- i - Energia interna, definido pela equação (2.6.25)

- K - Relação entre os calores específicos C_p e C_v
- K_c - Coeficiente de condutividade térmica (K_{cm} = valor médio)
- K_x - Parâmetro de correção das influências de $\frac{dp}{dx} \neq 0$ e $\frac{dT}{dx} \neq 0$
- L - Diâmetro do cilindro
- m - Coeficiente de viscosidade para fluidos não-newtonianos (newtoniano $m=\mu$)
- M - Número de Mach
- n - Expoente da taxa de variação da velocidade para fluidos não newtonianos (newtoniano $n=1$)
- N_u - Número de Nusselt
- Pr - Número de Prandtl (Pr_m = valor médio)
- p - Pressão estática
- q_x - Fluxo de calor local definido pela eq. (6.2.1)
- Re - Número de Reynolds
- Re_{δ_2} - Número de Reynolds local relativo à espessura de perda de momentum (δ_2)
- P - Função para iteração
- Q - Função para iteração
- r - "Recovery factor"
- R_c - Raio do cilindro

- R - Constante universal dos gases
- s - Fator de Analogia
- S_T - Número de Stanton
- T - Temperatura absoluta do fluido (T_m = valor médio)
- T_e - "Recovery temperature"
- u - Velocidade do fluido na direção x
- U - Velocidade livre do fluido
- U^* - Adimensionalização do perfil de velocidades na extremidade da camada limite
- v - Velocidade do fluido na direção y
- w - Expoente na fórmula de correlação entre a massa específica e a temperatura
- x - Coordenada ao longo da parede do cilindro, na direção do escoamento.
- x^* - Adimensionalização do comprimento sobre a superfície do cilindro
- X - Componente na direção x da força externa por unidade de massa
- y - Coordenada perpendicular à parede do cilindro, dirigida para fora

- Y - Componente na direção y da força externa por unidade de massa
- Z - Parâmetro de espessura
- Z_H - Definido pela equação (2.6.61)
- Z_j - Variável da equação diferencial ordinária da quantidade de movimento
- Z_E - Variável da equação diferencial ordinária da energia mecânica.

Símbolos Gregos:

- α - Parâmetro do perfil de velocidade definido pela equação (3.1.4-a)
- β - Definido pela equação (3.3.11)
- γ - Parâmetro do perfil de velocidades definido pela equação (3.1.2)
- Γ - Parâmetro do perfil de velocidades, definido pela equação (3.1.4-b)
- δ - Espessura da camada limite
- δ_1 - Espessura de perda de velocidade, definido pela equação (2.6.11)
- δ_2 - Espessura de perda de momentum definida pela equação (2.6.10)
- δ_3 - Espessura de perda de energia definida pela eq.(2.6.15)

- δ_4 - Espessura de perda de massa específica definida pela equação (2.6.18).
- Δ - Divergente
- ΔT - Diferença entre a temperatura da parede do cilindro e a temperatura externa.
- ϵ - Parâmetro do perfil de velocidades, definido pela eq. (3.2.1)
- μ - Viscosidade dinâmica
- η - Adimensionalização da ordenada $y(\eta = \frac{y}{\delta})$
- ρ - Massa específica
- θ^0 - Ângulo central subtendido pelo comprimento x
- θ - Parâmetro da transferência de calor definido pela equação (2.6.36)
- τ_{xy} - Tensão de cisalhamento segundo o eixo dos x
- τ - Expoente variável do perfil de velocidades
- Φ - Termo de dissipação nas equações de Navier-Stokes
- χ - Parâmetro de sucção definido pela equação (2.5.2.1)
- ν - Expoente da "função peso"
- ψ - Número de sucção definido pela equação (2.5.2.2)
- ∇ - Nível de sucção definido pela equação (6.1.3)

Índices

- δ - Valor local na extremidade da camada limite
- δ_2 - Valor relativo à espessura da perda de momentum (δ_2)
- ∞ - Valor em um ponto de referência fora da camada limite
- s - Valor no ponto de separação
- o - Valor na parede do cilindro
- i - Índice de interação
- $*$ - Valor adimensionalizado
- J - Valor na lei da quantidade de movimento
- E - Valor na lei da energia mecânica
- H - Valor na lei da energia térmica

APÊNDICE IPERFIL DE TEMPERATURA, DE VELOCIDADE E SEUS
COEFICIENTES

O perfil de temperatura utilizado é da forma

$$\frac{T}{T_{\delta}} = A + (B+Kx)\frac{U}{U_{\delta}} + (C-Kx)\left(\frac{U}{U_{\delta}}\right)^2 \quad (\text{AI-1})$$

com as definições:

$$A = 1 + r \cdot \frac{K-1}{2} M_{\delta}^2 (1-\theta) \quad B = \theta \cdot r \cdot \frac{K-1}{2} M_{\delta}^2 \quad (\text{AI-2})$$

$$C = -r \cdot \frac{K-1}{2} M_{\delta}^2 \quad (\text{AI-3})$$

o perfil de velocidades é definido por

$$\frac{u}{U_{\delta}} = 1 - (1-\eta)^{\tau} (1 - EK + A_1 \eta + A_2 \eta^2 + A_3 \eta^3) \quad (\text{AI-4})$$

obtemos após derivar com relação a η :

$$\frac{\partial \frac{u}{U_{\delta}}}{\partial \eta} = \tau (1-\eta)^{\tau-1} \cdot (1 + A_1 \eta + A_2 \eta^2 + A_3 \eta^3) - (1-\eta)^{\tau} (A_1 + 2A_2 \eta + 3A_3 \eta^2) \quad (\text{AI-5})$$

que, aplicada ao ponto $y=0$ ($\eta=0$), se torna:

$$\left. \frac{\partial \frac{u}{U_{\delta}}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \tau - A_1 \quad (\text{AI-6})$$

ou, pela definição de ϵ dada em (3.1.11)

$$A_1 = \tau - \epsilon \quad (\text{AI-7})$$

Derivando novamente com relação a η e aplicando a relação anterior para A_1 , obtemos no ponto $y=0$ ($\eta=0$)

$$-\left. \frac{\partial^2 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=0} = -\tau(\tau-1) + 2\tau(\tau-\epsilon) - 2A_2 \quad (\text{AI-8})$$

que, pela definição de γ dada em (3.1.12), nos fornece

$$A_2 = \frac{\gamma}{2} - \tau \cdot \epsilon + \frac{\tau^2 + \tau}{2} \quad (\text{AI-9})$$

Partindo da derivada segunda do perfil

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \eta^2} = & -(\tau-1) \cdot \tau \cdot (1-\eta)^{\tau-2} (1 + A_1 \eta + A_2 \eta^2 + A_3 \eta^3) + \tau(1-\eta)^{\tau-1} (A_1 + 2A_2 \eta + 3A_3 \eta^2) + \\ & + (1-\eta)^{\tau-1} (A_1 + 2A_2 \eta + 3A_3 \eta^2) - (1-\eta)^\tau (2A_2 + 6A_3 \eta) \end{aligned} \quad (\text{AI-10})$$

e derivando novamente com relação a η e aplicando as relações para A_1 e A_2 obtidas anteriormente, temos, no ponto $y=0$ ($\eta=0$)

$$\left. \frac{\partial^3 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \eta^3} \right|_{\eta=0} = \tau^3 + 3\tau^2 + 2\tau - 3 \cdot \epsilon(\tau^2 + \tau) + 3\tau \cdot \gamma - 6A_3 \quad (\text{AI-11})$$

Considerando a condição de compatibilidade na forma geral (2.4.15) e derivando esta expressão com relação a y , temos:

$$-\left. v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \frac{\mu_0}{\rho_0} \left[\frac{w}{U_\delta} \cdot \frac{T_\delta}{T_0} (B + Kx) \cdot 2 \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{y=0} + \left. \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right|_{y=0} \quad (\text{AI-12})$$

que adimensionalizada nos fornece:

$$-v \frac{U_\delta}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^2} \Big|_{y=0} = \frac{\mu_0}{\rho_0} \left[\frac{w}{U_\delta} \cdot \frac{T_\delta}{T_0} \cdot (B+Kx) \cdot 2 \cdot \frac{U_\delta}{\delta} \cdot \frac{\partial \frac{u}{U_\delta}}{\partial \frac{y}{\delta}} \Big|_{y=0} \cdot \frac{U_\delta}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^2} \Big|_{y=0} + \right. \\ \left. + \frac{U_\delta}{\delta^3} \cdot \frac{\partial^3 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^3} \Big|_{y=0} \right] \quad (\text{AI-13})$$

ou

$$- \frac{\rho_0 v_0}{\mu_0} \cdot \frac{U_\delta}{\delta^2} \cdot \frac{\partial \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^2} \Big|_{y=0} = 2 \cdot \frac{w}{U_\delta} \cdot \frac{U_\delta^2}{\delta^3} \cdot \frac{T_\delta}{T_0} (B+Kx) \cdot \frac{\partial \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)} \Big|_{y=0} \\ + \frac{\partial^2 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^2} \Big|_{y=0} + \frac{U_\delta}{(\delta)^3} \cdot \frac{\partial^3 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^3} \Big|_{y=0} \quad (\text{AI-14})$$

Utilizando as definições de ϵ e γ obtemos:

$$- \frac{\rho_0 v_0}{\mu_0} \cdot \frac{\delta^3}{\delta^2} \cdot \frac{U_\delta}{U_\delta^2} \cdot (-\gamma) = 2 \cdot \frac{w}{U_\delta} \cdot \frac{T_\delta}{T_0} \cdot (B+Kx) \cdot \epsilon \cdot \gamma + \frac{1}{U_\delta} \cdot \frac{\partial^3 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^3} \Big|_{y=0} \quad (\text{AI-15})$$

ou

$$\frac{\partial^3 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^3} \Big|_{y=0} = \gamma \left(\frac{\rho_0 v_0 \delta^2}{\mu_0} \cdot \frac{\delta}{\delta^2} - 2 \cdot w \frac{T_\delta}{T_0} \cdot (B+Kx) \cdot \epsilon \right) \quad (\text{AI-16})$$

donde finalmente

$$\left. \frac{\partial^3 \frac{u}{U_\delta}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^3} \right|_{y=0} = \gamma \left(-\chi \cdot \left(\frac{\Gamma}{\gamma}\right)^{-1/2} - 2 \cdot w \cdot \frac{T_\delta}{T_0} \cdot (B+Kx) \cdot \epsilon \right) \quad (AI-17)$$

A obtenção de A_3 é feita utilizando esta condição de compatibilidade na parede e a derivada terceira do perfil de velocidades.

Obtemos, então:

$$\gamma \left(-\chi \left(\frac{\Gamma}{\gamma}\right)^{-1/2} - 2 \cdot w \cdot \frac{T_\delta}{T_0} \cdot (B+Kx) \cdot \epsilon \right) = \tau^3 + 3\tau^2 + 2\tau - 3 \cdot \epsilon (\tau^2 + \tau) + 3\tau \cdot \gamma - 6A_3 \quad (AI-18)$$

ou

$$-A_3 = \frac{\gamma}{6} \left[-\chi \left(\frac{\Gamma}{\gamma}\right)^{-1/2} - 2 \cdot w \cdot \frac{T_\delta}{T_0} \cdot (B+Kx) \cdot \epsilon - 3\tau \right] - (\tau^3 + 3\tau^2 + 2\tau) + 3\epsilon (\tau^2 + \tau) \quad (AI-19)$$

e, finalmente:

$$A_3 = \frac{\gamma}{6} \left[\chi \left(\frac{\Gamma}{\gamma}\right)^{-1/2} + 2 \cdot w \cdot \frac{B+Kx}{A} \cdot \epsilon + 3\tau \right] + \frac{\tau^3 + 3\tau^2 + 2\tau}{6} - \epsilon \cdot \frac{\tau^2 + \tau}{2} \quad (AI-20)$$

No caso de $\mu = \mu_0$ temos $w=0$, e o coeficiente para o caso incompressível será:

$$A_3 = \frac{\gamma}{6} \left(\chi \left(\frac{\Gamma}{\gamma}\right)^{-1/2} + 3\tau \right) + \frac{\tau^3 + 3\tau^2 + 2\tau}{6} - \epsilon \cdot \frac{\tau^2 + \tau}{2} \quad (AI-21)$$

APÊNDICE IIDETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DE
ARRASTE E DE DISSIPACÃO

O parâmetro C_f da equação da quantidade de movimento é calculada a partir de sua definição

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\tau_0}{\rho_\delta U_\delta^2} \quad (\text{AII-1})$$

Aplicada ao fluido newtoniano ($n=1$) obtemos

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\mu_0 \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}}{\rho_\delta U_\delta^2} \quad (\text{AII-2})$$

que, adimensionalizada se torna

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\mu_0 \frac{U_\delta}{\delta_2} \left. \frac{\partial \frac{u}{U_\delta}}{\partial \frac{y}{\delta_2}} \right|_{y=0}}{\rho_\delta \cdot U_\delta^2} = \frac{U_\delta \left. \frac{\partial \frac{u}{U_\delta}}{\partial \frac{y}{\delta_2}} \right|_{y=0}}{\frac{\rho_\delta \cdot U_\delta^2 \cdot \delta_2}{\mu_0}} \quad (\text{AII-3})$$

ou, utilizando a definição de α e de Re_{δ_2}

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\alpha}{Re_{\delta_2}} \quad (\text{AII-4})$$

O parâmetro C_D , da Equação da Energia mecânica, é calculado a partir da sua definição

$$2C_D = \frac{2}{\rho_\delta U_\delta^3} \cdot \left[U_0 \tau_0 + \int_{U_0}^{U_\delta} \tau \cdot du \right] \quad (\text{AII-5})$$

para o fluido viscoso ($\mu_0=0$) e newtoniano ($n=1$), obtemos:

$$2C_D = \frac{2}{\rho_\delta U_\delta^3} \cdot \int_0^{U_\delta} \tau \cdot du = \frac{2}{\rho_\delta U_\delta^3} \cdot \int_0^\delta \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) (dy) \quad (\text{AII-6})$$

$$2C_D \equiv \frac{2}{\rho_\delta U_\delta^3} \int_0^\delta \frac{\mu_0}{\mu_0} \cdot \mu \left(\frac{U_\delta \cdot \frac{\partial u}{\partial U_\delta}}{\delta_2 \cdot \frac{\partial y}{\partial \delta_2}} \right)^2 \cdot dy \quad (\text{AII-7})$$

$$2C_D \equiv \frac{2 \cdot U_\delta^2}{\rho_\delta U_\delta^3} \cdot \frac{\mu_0}{\delta_2} \int_0^\delta \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial U_\delta}}{\frac{\partial y}{\partial \delta_2}} \right)^2 \cdot dy \quad (\text{AII-8})$$

Utilizando a definição de Re_{δ_2} e mudando os limites da integração:

$$2C_D \equiv \frac{2}{Re_{\delta_2}} \cdot \frac{1}{\delta_2} \int_0^1 \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \left(\frac{\frac{\partial \left(\frac{u}{U_\delta} \right)}{\frac{\delta}{\delta_2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \delta}} \right)^2 \cdot \frac{\partial \left(\frac{y}{\delta} \right)}{\partial \delta} \cdot \delta \quad (\text{AII-9})$$

$$2C_D = \frac{2}{Re_{\delta_2}} \cdot \frac{\delta}{\delta_2} \cdot \frac{\delta_2^2}{\delta^2} \cdot \int_0^1 \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \left(\frac{\frac{\partial \frac{u}{U_\delta}}{\partial \eta}}{\partial \eta} \right)^2 \cdot \partial \eta \quad (\text{AII-10})$$

$$2C_D = \frac{2}{Re_{\delta_2}} \cdot \frac{\delta_2}{\delta} \cdot \int_0^1 \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \left(\frac{\frac{\partial \frac{u}{U_\delta}}{\partial \eta}}{\partial \eta} \right)^2 \cdot \eta \quad (\text{AII-11})$$

ou, em forma resumida

$$2C_D = \frac{2}{Re_{\delta_2}} \cdot \beta \quad (AII-12)$$

APÊNDICE IIISOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

No caso de fluido newtoniano ($n=1$), as equações diferenciais são da forma

$$\frac{\partial y}{\partial x} + p(x) \cdot y = g(x) \quad (\text{AIII-1})$$

e tem para solução

$$y = \frac{1}{e^{\int^x p(t) dt}} \left[\int^x e^{\int^x p(t) dt} \cdot g(s) \cdot ds \right] + \frac{\zeta}{e^{\int^x p(t) dt}} \quad (\text{AIII-2})$$

A aplicação à equação da quantidade de movimento é feita como segue:

$$\frac{dZ_j}{dx} + 4 \cdot \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} \cdot Z_j - F_j = 0 \quad (\text{AIII-3})$$

$$e^{\int_{x_0}^x 4 \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} dx} = e^{L_n \left[\frac{U_\delta x}{U_{\delta x_0}} \right]^4} = \left[\frac{U_\delta x}{U_{\delta x_0}} \right]^4 \quad (\text{AIII-4})$$

$$Z_j = \left[\frac{U_\delta x}{U_{\delta x_0}} \right]^4 \cdot \int \left(\frac{U_\delta x}{U_{\delta x_0}} \right)^4 \cdot F_j \cdot dx + \zeta \cdot \left(\frac{U_{\delta x_0}}{U_\delta x} \right)^4 \quad (\text{AIII-5})$$

$$F_j = \bar{F}_j \quad (\text{AIII-6})$$

$$x = x_0 \longrightarrow Z_{j_0} = \zeta \quad (\text{AIII-7})$$

$$Z_j = Z_{j_0} \cdot \left[\frac{U_{\delta x_0}}{U_{\delta x}} \right] + \frac{\bar{F}_j}{\left[U_{\delta x_0} \right]^4} \cdot \int_{x_0}^x \left[U_{\delta x} \right]^4 \cdot dx \quad (\text{AIII-8})$$

A aplicação à equação da energia mecânica é semelhante. Vamos, agora, aplicar a equação da energia térmica:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} + \left\{ \frac{\alpha - \chi}{Z_j} + \frac{1}{T_\delta} \frac{dT_\delta}{dx} - \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} \left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) \right\} \cdot E - \\ - \frac{1}{Z_j} \left\{ \frac{\alpha}{Pr} \left[r \frac{K-1}{2} M_\delta^2 \cdot \theta + Kx \right] + \chi \left[\frac{K-1}{2} M_\delta^2 (r(1-\theta)-1) \right] \right\} = 0 \quad (\text{AIII-9}) \end{aligned}$$

Considerando valores médios para os integrantes do último termo temos:

$$F_H = \bar{F}_H \quad (\text{AIII-10})$$

e a equação

$$\frac{dE}{dx} + E \cdot \left\{ \left(\frac{\alpha - \chi}{Z_j} \right) - \frac{1}{U} \frac{dU_\delta}{dx} \cdot \left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) + \frac{1}{T_\delta} \cdot \frac{dT_\delta}{dx} \right\} - \bar{F}_H = 0 \quad (\text{AIII-11})$$

tem solução

$$E_x = E_{x_0} \cdot e^{\left(\frac{\alpha - \chi}{Z_j} \right) (x_0 - x)} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{\left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)} \cdot \left[\frac{T_{\delta x_0}}{T_{\delta x}} \right] + \frac{U_{\delta x}}{T_{\delta x} \cdot e^{\left(\frac{\alpha - \chi}{Z_j} \right) \cdot x}} \cdot \bar{F}_H \cdot \phi \quad (\text{AIII-12})$$

em que

$$\phi = \int_{x_0}^x \frac{T_{\delta x}}{U_{\delta x} \left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right)} \cdot e^{\left(\frac{\alpha - \chi}{Z_j}\right) \cdot x} \cdot dx$$

APÊNDICE IVDETERMINAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS

Partindo das equações da continuidade e da quantidade de movimento

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (\text{AIV-1})$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (\text{AIV-2})$$

Multiplicando a equação da continuidade por $\frac{U^{v+1}}{v+1}$ e a da quantidade de movimento por U^v e adicionando as duas equações obtemos:

$$\frac{1}{v+1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^{v+2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u^{v+1}) \right\} = U^v \left\{ - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \right\} \quad (\text{AIV-3})$$

Integrando com relação a y entre os limites $y = 0$ e $y = \delta$ e adimensionalizando pela multiplicação por $\frac{v+1}{\rho_\delta U_\delta^{v+2}}$ obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_\delta U_\delta^{v+2}} \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y}(\rho u^{v+2}) dy + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho v u^{v+1}}{\rho_\delta U_\delta^{v+2}} \right) dy = \\ - \frac{v+1}{\rho_\delta U_\delta^2} \int_0^\delta \frac{dp}{dx} \left(\frac{u}{U_\delta} \right)^v dy + \frac{v+1}{\rho_\delta U_\delta^2} \int_0^\delta \frac{U^v}{U_\delta^v} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (\text{AIV-4})$$

Considerando que, pela simplificação da camada limite $\frac{dp}{dx}$ é constante ao longo de y , e que temos a relação

$$\frac{dp}{dx} = - \rho_{\delta} U_{\delta} \frac{dU_{\delta}}{dx} \quad (\text{AIV-5})$$

A equação da continuidade nos dá

$$\rho_{\delta} U_{\delta} = \rho_0 v_0 - \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy \quad (\text{AIV-6})$$

e a fórmula de Leibnitz nos fornece

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^{v+2}) dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (\rho u^{v+2}) dy - \frac{d\delta}{dx} \quad (\text{AIV-7})$$

Obtêm-se, então, a forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{\delta} U_{\delta}^{v+2}} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^{v+2} dy - \frac{d\delta}{dx} + \frac{\rho_0 v_0}{\rho_{\delta} U_{\delta}} = \frac{1}{\rho_{\delta} U_{\delta}} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy + \frac{d\delta}{dx} - \frac{\rho_0 v_0 U_0^{v+1}}{\rho_{\delta} U_{\delta}^{v+2}} = \\ (v+1) \frac{1}{U_{\delta}} \frac{dU_{\delta}}{dx} \int_0^{\delta} \left(\frac{u}{U_{\delta}} \right)^v dy + (v+1) \int_0^{\delta} \left(\frac{u}{U_{\delta}} \right)^v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{\rho_{\delta} U_{\delta}^2} \right) dy \end{aligned} \quad (\text{AIV-8})$$

A consideração de

$$\frac{1}{\rho_{\delta} U_{\delta}^{v+2}} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^{v+2} dy \equiv \frac{1}{\rho_{\delta} U_{\delta}^{v+2}} \cdot \frac{d}{dx} \left[\rho_{\delta} U_{\delta}^{v+2} \cdot \int_0^{\delta} \frac{\rho u^{v+2}}{\rho_{\delta} U_{\delta}^{v+2}} dy \right] \quad (\text{AIV-9})$$

e

$$\frac{1}{\rho_{\delta} U_{\delta}} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy \equiv \frac{1}{\rho_{\delta} U_{\delta}} \frac{d}{dx} \left[\rho_{\delta} U_{\delta}^{v+2} \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_{\delta} U_{\delta}^{v+2}} dy \right] \quad (\text{AIV-10})$$

bem como a relação

$$\frac{1}{\rho_\delta} \frac{d\rho_\delta}{dx} = - \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} \cdot M_\delta^2 \quad (\text{AIV-11})$$

permite obter a forma

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta} \left[1 - \frac{U^{v+2}}{U_\delta^{v+1}} \right] dy - (v+2-M_\delta^2) \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta} \left[1 - \frac{U^{v+1}}{U_\delta^{v+1}} \right] dy - \\ - \frac{\rho_0 v}{\rho_\delta U_\delta} \left[\frac{U_0^{v+1}}{U_\delta^{v+1}} - 1 \right] = \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} (v+1) \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_\delta U_\delta} \left[\frac{\rho_\delta}{\rho} \frac{U^{v-1}}{U_\delta^{v-1}} - 1 \right] dy + \\ + (v+1) \int_0^\delta \left(\frac{u}{U_\delta} \right)^v \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\tau}{\rho_\delta U_\delta^2} \right) dy \quad (\text{AIV-12}) \end{aligned}$$

que, com as definições (2.6.4), (2.6.5), (2.6.6) e (2.6.7) nos dá o sistema de equações diferenciais de 1ª ordem

$$\frac{d}{dx} f_v + f_v(v+2 - \frac{g_v}{f_v} - M_\delta^2) \frac{1}{U_\delta} \frac{dU_\delta}{dx} + e_v + h_v = 0 \quad (\text{AIV-13})$$

Partindo da equação da continuidade multiplicada por $[h_\delta^{v-1} - h^{v-1}]$ e da equação da energia, colocada sob a forma de entalpia, multiplicada por $(v+1) \cdot h^v$ obtêm-se, por subtração desta equação da primeira e da consideração de que

$$h = C_p T + \frac{U_\delta^2}{2} = \text{const.} \quad (\text{AIV-14})$$

a forma abaixo

$$\frac{\partial}{\partial x} [\rho u (h_\delta^{v+1} - h^{v+1})] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v (h_\delta^{v+1} - h^{v+1})] = -(v+1) \cdot h^v \cdot \frac{\partial}{\partial y} (U\tau + K_c \frac{\partial T}{\partial y}) \quad (\text{AIV-15})$$

Integrando com relação a y nos limites $y=0$ e $y=\delta$ obtemos

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} [\rho u (h_\delta^{v+1} - h_0^{v+1})] dy + \left\{ \rho_\delta U_\delta [h_\delta^{v+1} - h_\delta^{v+1}] - \rho_0 v_0 [h_\delta^{v+1} - h_0^{v+1}] \right\} =$$

$$- (v+1) \int_0^\delta h^v \cdot \partial \left(u\tau + K_c \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{AIV-16})$$

ou, pela utilização da fórmula de Leibnitz,

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u (h_\delta^{v+1} - h_0^{v+1}) dy - \rho_\delta U_\delta [h_\delta^{v+1} - h_\delta^{v+1}] \cdot \frac{d\delta}{dx} = \rho_0 v_0 (h_\delta^{v+1} - h_0^{v+1}) -$$

$$- (v+1) \int_0^\delta h^v \cdot \partial \left(u\tau + K_c \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{AIV-17})$$

donde

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u (h_\delta^{v+1} - h_0^{v+1}) dy = \rho_0 v_0 (h_\delta^{v+1} - h_0^{v+1}) - (v+1) \int_0^\delta h^v \cdot \partial \left(u\tau + K_c \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

(AIV-18)

que é a equação integral da Energia Térmica (2.6.22).

APÊNDICE VSIMBOLOGIA PARA CODIFICAÇÃO

Subprogramas FUNCTION:

- FC1 - calcula o integrando de B_J (velocidade externa na Eq. da Energia)
- FC2 - calcula o integrando de B_E (velocidade externa na Eq. da Energia)
- FC3 - calcula o integrando de β (coeficiente de dissipação)
- FC4 - calcula a função Temperatura externa T
- FCE - calcula o integrando de ϕ (na equação da energia térmica)
- FC5 - calcula o integrando do perfil de velocidade $(U/U_\delta)^2$
- FC6 - calcula o integrando do perfil de velocidade $(U/U_\delta)^3$
- FC7 - calcula o integrando do perfil de velocidade (U/U_δ)
- FC8 - calcula o perfil de temperatura (T/T_δ)
- FC9 - calcula o integrando de $F3$
- FC10 - calcula o integrando de $F1$
- FC11 - calcula o integrando de $F2$
- FC12 - calcula o integrando de $F4$
- FC0 - calcula o integrando de $F0$

- ZT0 - calcula o expoente τ do perfil de velocidade .
- AOI - calcula os coeficientes do perfil de velocidade
- FCI - calcula as funções F_0 , P e Q

Subprogramas SUBROUTINE:

- FIP - calcula as integrais pela Regra de Simpson
- QATR - calcula as integrais de B_J , B_E e β
- CRIS - calcula a solução do sistema não linear $P=0$ e $Q=0$
- AUXFCN- subprograma auxiliar de NLSYS1
- BACK - subprograma auxiliar de NLSYS1
- NLSYS1- calcula a solução do sistema não linear $P=0$ e $Q=0$

Símbolos para codificação FORTRAN:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| ALFA - α | ALF - α |
| AK - χ | AKM - $\bar{\chi}$ |
| AKZ - $\frac{\alpha - \chi}{Z_j}$ | AKZM - $\left(\frac{\alpha - \chi}{Z_j} \right)$ |
| AP - $\frac{\alpha}{Pr}$ | APM - $\left(\frac{\alpha}{Pr} \right)$ |
| A - A | A1 - A1 |
| A2 - A2 | A3 - A3 |
| AH - A_H | AJ - A_j |
| AE - A_E | |
| BETA - β | B - B |
| BET - β | BB - B |

$$BH - B_H$$

$$BJ - B_J$$

$$CPCV - K (C_p/C_v)$$

$$C - C$$

$$CD - C_D \cdot Re_\infty^{1/1+n}$$

$$CP - C_p$$

$$CET - (T^*)^{\frac{1}{K-1} - w}$$

$$C1 - C_1$$

$$DELX - \Delta x$$

$$DU - \frac{dU}{dx}^*$$

$$D2D - \frac{\delta_2}{\delta}$$

$$D1D - \frac{\delta_1}{\delta}$$

$$DEL T - T_e - T_o$$

$$FH - F_H$$

$$FB - F_E$$

$$FE - F_E$$

$$FI - \phi$$

$$BE - B_E$$

$$CK12 - (K-1)/2$$

$$CF - C_f \cdot Re_\infty^{1/1+n}$$

$$CMAC - T^*/(U^*)^2$$

$$CR - R \text{ (const.univ. gases)}$$

$$CAW - 1/A^W$$

$$C2 - C_2$$

$$DELKX - \Delta K_x$$

$$DZ - \frac{\delta_2}{L} \cdot Re_\infty^{1/1+n}$$

$$D2DM - \left(\frac{\delta_2}{\delta} \right)$$

$$DAM - \gamma$$

$$DEQ - E_c - E_b$$

$$FA - F_J$$

$$FJ - F_J$$

$$FRKM - r \cdot \frac{K-1}{2} \cdot M_\delta^2$$

$$F4 - \frac{\delta_4}{\delta}$$

$$FH - F_H$$

$$FHM - (\overline{F_H})$$

$$GA - \Gamma$$

$$GAM - \overline{\Gamma}$$

$$H3 - H_{32}$$

$$H3M - (\overline{H_{32}})$$

$$H12 - H_{12}$$

$$HH12M - (\overline{H_{12}})$$

$$H43 - \frac{\delta_4}{\delta_3}$$

$$I - i$$

$$PR - Pr$$

$$PSI - \psi$$

$$Q - q_x$$

$$QP - (\dot{U}^*) \left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)$$

$$QR - T^* \cdot e^{\left(\frac{\alpha - X}{Z_j} \right) \cdot x_1}$$

$$R - L$$

$$RECF - r$$

$$RNU - Nu$$

$$RK12 - r \cdot \frac{K-1}{2}$$

$$RKX - Kx$$

$$REK - Kx$$

$$RD2 - \frac{Re_{\delta_2}}{Re_{\infty}^{1/n+1}}$$

$$SI - \nabla$$

$$T - \eta \text{ (Funções e Subrotinas)} \quad T - T^*$$

$$TR - T_e$$

$$TINF - T_{\infty}$$

TETA - θ

TO - $\frac{\tau_0 \text{Re}_\infty^{1/n+1}}{\rho_\infty U_\infty^2}$

TW - T_0

U - U^*

UINF - U_∞

VMAC - M_δ

VKX - Kx

W - w

X - x^*

ZT - τ

ZJ - Z_j

TET - $\theta^0(\text{ângulo})$

TT - T_i^*/T_{i+1}^*

UU - U_i^*/U_{i+1}^*

VSON - V_{som}

XX - x (Funções e Sub-rotinas)

ZE - Z_E

ZJM - $(\overline{Z_j})$

E6700/87700 F O R T R A N C O M P I L A T I O N M A R K 2.7.480 WEI

FILE	8=CARD,UNIT=READER	00001000
FILE	5=IMPRESS,UNIT=PRINTER	00002000
C	CAMADA LIMITE FLUIDO NEWTONIANO COM GRADIENTE DE PRESSAO	00003000
C		00004000
C	GEOMETRIA DO MODELO: CILINDRO CIRCULAR HORIZONTAL	00005000
C		00006000
C*****	***** START OF FUNCTION FC1,FC2,FC3 *****	00007000
	FUNCTION FC1(XX)	00008000
	COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3M,GAM,AKM,OZCM,I,A,B,C,RKX	00009000
	FCO=XX-C1*XX**3-C2*XX**5	00010000
	FC1=FCO**(.4.*EN)	00011000
	RETURN	00012000
	END	00013000

FUNCTION FC2(XX)	00014000
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3M,GAM,AKM,OZCM,I,A,B,C,RKX	00015000
FCO=XX-C1*XX**3-C2*XX**5	00016000
FC2=FCO**(.3.*EN+1)	00017000
RETURN	00018000
END	00019000


```

FUNCTION FC3(T)
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3M,GAM,AKM,D2CM,I,A,B,C,RKX
W=0.75
B0=ZT-1.
B1=ZT+1.
B2=ZT+2.
B3=ZT+3.
B4=1.-T
B5=EN+1.
B6=B0+B5
FC4=(1.-EK)*ZT-A1+(A1*B1-2.*A2)*T+(A2*B2-3.*A3)*T**2+A3*B3
1  *T**3
P1=(B+RKX)/A
P2=(C-RKX)/A
P3=1.-FC7(T)
P4=(1.-FC7(T))*2
FC3=((1.+P1*P3+P2*P4)**W)*B4**B6*FC4**B5
RETURN
END

```

```

00020000 C 005:0000:0
00021000 C 005:0000:0
00022000 C 005:0000:0
00023000 C 005:0002:3
00024000 C 005:0004:4
00025000 C 005:0005:3
00026000 C 005:0007:1
00027000 C 005:0008:5
00028000 C 005:000A:0
00029000 C 005:000B:3
00030000 C 005:000C:5
00031000 C 005:0016:5
00032000 C 005:0019:1
00033000 C 005:001C:0
00034000 C 005:001E:5
00035000 C 005:0020:5
00036000 C 005:0023:1
00037000 C 005:002A:5
00038000 C 005:002B:2

```

```

C ***** START OF FUNCTIONS FC4 E FCE *****
FUNCTION FC4(XX)
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3M,GAM,AKM,D2CM,I,A,B,C,RKX,AKZH,
1 HH12M,TD,UD,BT,RN,XI,DELX,TSAT,CMAC
P1=XX-C1*XX**3-C2*XX**5
FC4=CMAC*P3**2
RETURN
END

```

```

00039000 C 005:001A:0
00040000 C 006:0000:0
00041000 C 006:0000:0
00042000 C 006:0000:0
00043000 C 006:0000:0
00044000 C 006:0004:5
00045000 C 006:0006:5
00046000 C 006:0007:2

```

```

FUNCTION FCF(XY)
EXTERNAL FC1,FC2
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3M,GAM,AKY,D2DM,I,A,B,C,RKX,AKZH,
1 HH12M,TD,UD,BT,RN,XI,DELX
P1=FC4(XY)
P2=EXP(AKZH*XY)
P3=XX-C1*XX**3-C2*XX**5
IF(P3-0.0001)1,1,2
1 P3=0.0001
GO TO 3
2 P3=P3
3 CONTINUE
P4=P3*(1.+HH12M)
FCE=P1*P2/P4
Y=FCE
RETURN
END

```

```

00048000 C 007:0000:0
00049000 C 007:0000:0
00050000 C 007:0000:0
00051000 C 007:0000:0
00052000 C 007:0001:4
00053000 C 007:0004:0
00054000 C 007:0008:5
00055000 C 007:000A:4
00056000 C 007:000C:3
00057000 C 007:0000:0
00058000 C 007:0000:5
00059000 C 007:0000:5
00060000 C 007:0010:4
00061000 C 007:0012:3
00062000 C 007:0013:0
00063000 C 007:0013:3

```

```

C ***** START OF FUNTIONS FC5 , FC6 , FC7 *****
FUNCTION FC5(T)
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3M,GAM,AKM,D2CM,I,A,B,C,RKX
P1=(1.-EK+A1*T+A2*T**2+A3*T**3)**2
P2=(1.-T)**(2.*ZT)
FC5=P1*P2
RETURN
END

```

```

00064000 C 007:0018:0
00065000 C 009:0000:0
00066000 C 009:0000:0
00067000 C 009:0000:0
00068000 C 009:0006:5
00069000 C 009:000A:1
00070000 C 009:000B:3
00071000 C 009:000C:0

```

```

FUNCTION FC6(T)
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3M,GAM,AKM,D2DM,I,A,B,C,RKX
P1=(1.-EK+A1*T+A2*T**2+A3*T**3)**3
P2=(1.-T)**(3.*ZT)
FC6=P1*P2
RETURN
END

```

```

C00720CC C OCA:0000:0
C00730CC C OCA:0000:0
C00740CC C OCA:0000:0
C00750CC C OCA:0007:1
C00760CC C OCA:000A:3
C00770CC C OCA:000B:5
C00780CC C OCA:000C:2

```

```

FUNCTION FC7(T)
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3M,GAM,AKM,D2DM,I,A,B,C,RKX
P1=(1.-EK+A1*T+A2*T**2+A3*T**3)
P2=(1.-T)**2T
FC7=P1*P2
RETURN
END

```

```

C00780CC C OCB:0000:0
C00800CC C OCB:0000:0
C00810CC C OCB:0000:0
C00820CC C OCB:0006:3
C00830CC C OCB:0009:2
C00840CC C OCB:000A:4
C00850CC C OCB:000B:1

```

```

C*****START OF FUNCTIONS FC8,FC9,FC10,FC11,FC12 *****
FUNCTION FC8(I)
EXTERNAL FC7
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3M,GAM,AKM,D2CM,I,A,B,C,RKX
FC8=A+(B+RKX)*(1.-FC7(I))+(C-RKX)*(1.-FC7(I))*2
RETURN
END

```

```

00085000 C 000:0011:0
00087000 C 000:0000:0
00088000 C 000:0000:0
00089000 C 000:0000:0
00090000 C 000:0000:0
00091000 C 000:0008:1
00092000 C 000:0008:4

```

```

FUNCTION FC9(I)
EXTERNAL FC7,FC8
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3M,GAM,AKM,D2CM,I,A,B,C,RKX
P1=FC7(I)
P2=FC8(I)
FC9=1.-(1./P2)+(P1/P2)
Y=FC9
RETURN
END

```

```

00093000 C 000:0000:0
00094000 C 000:0000:0
00095000 C 000:0000:0
00096000 C 000:0000:0
00097000 C 000:0001:4
00098000 C 000:0003:2
00099000 C 000:0005:5
00100000 C 000:0006:2
00101000 C 000:0006:5

```

```

FUNCTION FC10(I)
EXTERNAL FC7,FC8
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3H,GAM,AKM,D2DM,I,A,B,C,RKX
P1=FC7(I)
P2=FC8(I)
FC10=P1**2/P2
Y=FC10
RETURN
END

```

```

C0103000 C 0CF:0000:0
C0104000 C 0CF:0000:0
C0105000 C 0CF:0000:0
C0106000 C 0CF:0001:4
C0107000 C 0CF:0003:2
C0108000 C 0CF:0005:6
C0109000 C 0CF:0005:3
C0110000 C 0CF:0006:6

```

```

FUNCTION FC11(I)
EXTERNAL FC7,FC8
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3H,GAM,AKM,D2DM,I,A,B,C,RKX
P1=FC7(I)
P2=FC8(I)
FC11=P1**3/P2
Y=FC11
RETURN
END

```

```

C0111000 C 0CF:0000:0
C0112000 C 0CF:0000:0
C0113000 C 0CF:0000:0
C0114000 C 0CF:0000:0
C0115000 C 0CF:0001:4
C0116000 C 0CF:0003:2
C0117000 C 0CF:0005:2
C0118000 C 0CF:0005:5
C0119000 C 0CF:0006:2

```

```

FUNCTION FC12(I)
EXTERNAL FC7,FC9
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3M,GAP,AKM,D2CM,I,A,B,C,RKX
P1=FC7(T)
P2=FC9(T)
FC12=P3-P1
Y=FC12
RETURN
END

```

```

00120000 C 010:0000:0
00122000 C 010:0000:0
00123000 C 010:0000:0
00124000 C 010:0001:4
00125000 C 010:0003:2
00126000 C 010:0004:2
00127000 C 010:0004:5
00128000 C 010:0005:2

```

C

```

FUNCTION FCO
EXTERNAL FC8
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3M,GAP,AKM,D2CM,I,A,B,C,RKX
P2=FC8(T)
FCO=(1./P2)-1.
Y=FCO
RETURN
END

```

```

00130000 C 010:0000:0
00131000 C 010:0000:0
00132000 C 010:0000:0
00133000 C 010:0000:0
00134000 C 010:0001:4
00135000 C 010:0003:1
00136000 C 010:0003:4
00137000 C 010:0004:1

```

```

C ***** CALCULO DE INTEGRAL POR SIMPSON'S RULE *****
C ***** SELECAO AUTOMATICA DO TAMANHO DO INTERVALO *****
C *** START INTEGRAL EVALUATION GIVEN A = , B = , LOWER AND UP LIMITS **
SUBROUTINE FIP(A,B,FCT,Y)
  DX=(B-A)/2.
  FI1=FCT(B)+FCT(A)
  FI2=FCT(A+DX)
  FI3=0
  FI=DX*(FI1+4.*FI2)/3.
2  FI3=FI2+FI3
  FI2=0
  T(X)=DX
  DX=.5*DX
  X=A+DX
3  FI2=FI2+FCT(X)
  X=X+T(X)
  IF(X-B)3,3,4
4  FI4=DX*(FI1+4.*FI2+2.*FI3)/3.
  IF(ABS(FI4-FI)-0.001*ABS(FI4))6,6,5
5  FI=FI4
  GO TO 2
6  Y=FI4
  RETURN
END

```

```

001330000 C 011:0000:0
001330000 C 011:0000:0
001400000 C 012:0000:0
001410000 C 012:0000:0
001420000 C 012:0000:0
001430000 C 012:0001:5
001440000 C 012:0007:1
001450000 C 012:0008:2
001460000 C 012:0008:0
001470000 C 012:0000:5
001480000 C 012:0000:1
001490000 C 012:0000:5
001500000 C 012:0010:4
001510000 C 012:0013:0
001520000 C 012:0014:2
001530000 C 012:0017:4
001540000 C 012:0019:0
001550000 C 012:001A:0
001560000 C 012:001D:5
001570000 C 012:0021:3
001580000 C 012:0022:2
001590000 C 012:0022:5
001600000 C 012:0023:4
001610000 C 012:0024:1

```

```

C ***** START OF SUBROUTINE QATR *****
SUBROUTINE QATR(XL,XU,EPS,NDIM,FCT,Y,IER,AUX)
  DIMENSION AUX(1)
  PREPARATION OF ROMBERG-LOOP
  ALX(1)=.5*(FCT(XL)+FCT(XU))
  H=XU-XL
  IF(NDIM-1)8,8,1
1  IF(H)2,10,2
  NDIM IS GREATER THAN 1 AND H IS NOT EQUAL TO 0
2  H=.5*H
  E=EPS/ABS(H)
  DELT2=0.
  P=1.
  JC=1
  DO 7 I=2,NDIM
  Y=AUX(I)
  DELT1=DELT2
  HC=H
  HH=.5*HH
  P=.5*P
  X=XL+HH
  ST=0.
  DO 3 J=1,JJ
  ST=ST+FCT(X)
3  X=X+HD
  ALX(I)=.5*AUX(I-1)+P*SM
  A NEW APPROXIMATION OF INTEGRAL VALUE IS COMPLETED BY MEANS OF
  TRAPEZOIDAL RULE.
  START OF ROMBERG EXTRAPOLATION METHOD.
  Q=1.
  JI=I-1
  DO 4 J=1,JI
  II=I-J
  Q=Q+Q
  Q=Q+Q
4  AUX(II)=AUX(II+1)+(AUX(II+1)-AUX(II))/(Q-1.)
  END OF ROMBERG STEP
  DELT2=ABS(Y-AUX(1))
  IF(I-5)7,5,5
5  IF(DELT2-E)10,10,6
6  IF(DELT2-DELT1)7,11,11
7  JC=JJ+JJ
8  IER=2
9  Y=H*AUX(1)

```

```

001620000 C 012:0024:0
001630000 C 017:0000:0
001640000 C 017:0000:0
001650000 C 017:0000:0
001660000 C 017:0000:0
001670000 C 017:0007:1
001680000 C 017:0008:3
001690000 C 017:0009:4
001700000 C 017:0008:2
001710000 C 017:0008:2
001720000 C 017:0000:1
001730000 C 017:0000:5
001740000 C 017:0000:3
001750000 C 017:0000:1
001760000 C 017:0000:5
001770000 C 017:0011:0
001780000 C 017:0012:1
001790000 C 017:0013:0
001800000 C 017:0013:5
001810000 C 017:0016:0
001820000 C 017:0019:0
001830000 C 017:001A:2
001840000 C 017:001B:0
001850000 C 017:001C:0
001860000 C 017:001F:2
001870000 C 017:0022:5
001880000 C 017:0029:0
001890000 C 017:0029:0
001900000 C 017:0029:0
001910000 C 017:0029:0
001920000 C 017:0029:4
001930000 C 017:002B:0
001940000 C 017:002C:0
001950000 C 017:002D:3
001960000 C 017:002E:4
001970000 C 017:002F:3
001980000 C 017:0027:2
001990000 C 017:0027:2
002000000 C 017:0029:2
002010000 C 017:002A:4
002020000 C 017:002C:0
002030000 C 017:002D:2
002040000 C 017:002E:5
002050000 C 017:002F:1

```

```

10 RETURN
   IER=0
   GO TO 9
11 IER=1
   Y=H*Y
   RETURN
END

```

```

00200000 C 017:0041:4
00206000 C 017:0043:2
00207000 C 017:0043:3
00208000 C 017:0044:4
00209000 C 017:0045:0
00210000 C 017:0045:4
00211000 C 017:0047:0
00212000 C 017:0047:3

```

***** START OF FUNCTION ZIO *****
 EXPONENTE DO PERFIL DE VELOCIDADE

```

FUNCTION ZIO(EPS)
IF(EPS=1.) 1,1,2
1 A=7.
  B=1.7513
  C=-0.7026
  GO TO 3
2 A=8.
  B=-0.0235
  C= 0.6722
3 ZIO=A+B*EPS+C*EPS**2
  RETURN
END

```

```

00213000 C 017:0059:6
00214000 C 017:0059:0
00215000 C 018:0000:0
00216000 C 018:0000:0
00217000 C 018:0001:1
00218000 C 018:0002:0
00219000 C 018:0004:3
00220000 C 018:0006:4
00221000 C 018:0007:1
00222000 C 018:0008:0
00223000 C 018:000A:4
00224000 C 018:000C:3
00225000 C 018:000F:4
00226000 C 018:0010:1

```



```

***** START OF FUNCTION A01 *****
COEFICIENTES DE PERTE DE VELOCIDADES
FUNCTION A01(K, EPS, DAM)
EXTERNAL ZTC
COMMON C1, C2, A1, A2, A3, EN, EK, ZT, H3M, GAM, AKM, D2DM, I, A, B, C, RKX
ZT=ZTC(EPS)
W=C.75
IF(K-2) 1, 2, 3
1 A01=(1.-EK)*ZT-EPS
  GO TO 7
2 A01=DAM/2.-ZT*EPS+(1.-EK)*(ZT+ZT**2)/2.
  GO TO 7
3 IF(1-500) 4, 4, 5
4 IF(GAM/DAM) 8, 8, 9
8 D2DD=C.0001
  GO TO 6
9 IF((GAM/DAM)-0.0001) 5, 5, 89
5 D2DD=C2DM
  GO TO 6
89 D2DD=SQRT(GAM/DAM)
  GO TO 5
6 A01=(DAM/6.)*(3.+ZT*(AKM/EN)+D2DD*(-EN)*EPS**
  1 (1.-EN)-(EN-1.)*DAM/EPS)-EPS*(ZT+ZT**2)/2.+
  2 (1.-EK)*(ZT**3+3.*ZT**2+2.*ZT)/6.+(DAM/6.)*(2.*W*((9+RKX)/A)
  3 *EPS)
7 CONTINUE
  RETURN
  END

```

```

C0227000 C 018:0016:0
C0228000 C 018:0016:0
C0229000 C 01C:0000:0
C0230000 C 01C:0000:0
C0231000 C 01C:0000:0
C0232000 C 01C:0000:0
C0233000 C 01C:0002:1
C0234000 C 01C:0004:3
C0235000 C 01C:0007:5
C0236000 C 01C:000A:4
C0237000 C 01C:000B:1
C0238000 C 01C:0011:3
C0239000 C 01C:0012:0
C0240000 C 01C:0013:5
C0241000 C 01C:0015:5
C0242000 C 01C:0017:3
C0243000 C 01C:0018:0
C0244000 C 01C:0018:4
C0245000 C 01C:001C:5
C0246000 C 01C:001D:2
C0247000 C 01C:001F:4
C0248000 C 01C:0020:1
C0249000 C 01C:0026:2
C0250000 C 01C:002E:0
C0251000 C 01C:0038:1
C0252000 C 01C:0039:4
C0253000 C 01C:0039:4
C0254000 C 01C:003A:1

```

```

***** START OF FUNCTION F01 MODIFIED *****
FUNCTION F01(K, EPS, DAM)
EXTERNAL ZT0, A01, FC7, FC8, FC9, FC10, FC11, FC12
COMMON C1, C2, A1, A2, A3, EN, EK, ZT, H3M, GAM, AKM, D2DM, I, A, B, C, RKX
ZT=ZTC(EPS)
A1=A01(1, EPS, DAM)
A2=A01(2, EPS, DAM)
A3=A01(3, EPS, DAM)
IF(K-2) 1, 2, 3
1 CALL FIP(0., 1., FC10, Y)
  FCI=Y
  GO TO 4
2 CALL FIP(0., 1., FC11, Y)
  FCI=Y
  GO TO 4
3 CALL FIP(0., 1., FC9, Y)
  FCI=Y
4 CONTINUE
  RETURN
  END

```

```

C0255000 C 01C:0044:0
C0256000 C 01E:0000:0
C0257000 C 01E:0000:0
C0258000 C 01E:0000:0
C0259000 C 01E:0000:0
C0260000 C 01E:0002:1
C0261000 C 01E:0005:0
C0262000 C 01E:000B:0
C0263000 C 01E:000B:0
C0264000 C 01E:000E:2
C0265000 C 01E:0010:2
C0266000 C 01E:0011:1
C0267000 C 01E:0011:4
C0268000 C 01E:0013:4
C0269000 C 01E:0014:3
C0270000 C 01E:0015:0
C0271000 C 01E:0017:0
C0272000 C 01E:0017:5
C0273000 C 01E:0017:5
C0274000 C 01E:0018:2

```

C***** START OF FUNCTION FCI *****

```

FUNCTION FCI(K, EPSX, DAMX)
EXTERNAL FCI, FC5, FC6, FC7, FC8, FC9, FC10, FC11, FC12, FC0
EXTERNAL ZTC
COMMON C1, C2, A1, A2, A3, EN, EK, ZT, H3M, GAM, AKM, D2DM, I
EPS=EPSX
DAM=DAMX
F1=FCI(1, EPS, DAM)
F2=FCI(2, EPS, DAM)
F3=FCI(3, EPS, DAM)
Z1=ZTC(EPS)
CALL FIP(0., 1., FCG, Y)
FC=Y
IF(I-500) 1, 1, 2
1 IF(GAM/DAM) 8, 8, 9
8 D2CC=C.0001
GC TO 3
9 IF((GAM/DAM)-C.C001) 15, 15, 89
15 D2CC=C.0001
GC TO 3
89 D2CC=SQRT(GAM/DAM)
GC TO 3
2 D2CC=C2DM
3 IF(K-1) 4, 4, 5
4 FCI=F1-F2-(2.-H3M)*D2DM
GC TO 6
5 FCI=F1-F1+FCG-D2CC
6 CONTINUE
RETURN
END

```

```

00275000 C 01F:0022:0
00276000 C 01F:0000:0
00277000 C 01F:0000:0
00278000 C 01F:0000:0
00279000 C 01F:0000:0
00280000 C 01F:0000:0
00281000 C 01F:0000:5
00282000 C 01F:0001:4
00283000 C 01F:0004:0
00284000 C 01F:0006:3
00285000 C 01F:0009:0
00286000 C 01F:0008:1
00287000 C 01F:0000:1
00288000 C 01F:0000:0
00289000 C 01F:0000:0
00290000 C 01F:0011:5
00291000 C 01F:0013:3
00292000 C 01F:0014:0
00293000 C 01F:0017:4
00294000 C 01F:0019:3
00295000 C 01F:001A:0
00296000 C 01F:001C:2
00297000 C 01F:001C:5
00298000 C 01F:001E:0
00299000 C 01F:001F:1
00300000 C 01F:0022:2
00301000 C 01F:0025:5
00302000 C 01F:0025:1
00303000 C 01F:0025:1
00304000 C 01F:0025:4

```

C***** START OF SUBROUTINE CRIS *****

```

SUBROUTINE CRIS(DAM, EPS)
EXTERNAL FCI
COMMON C1, C2, A1, A2, A3, EN, EK, ZT, H3M, GAM, AKM, D2DM, I
DP=C.C00001
DE=1000*CP
DE=C.1
DE=C.05
1 DELEP=DE
DELEA=DD
DELP=C.5*DE
DELD=C.5*DD
EPS1=EPS
DAM1=DAM
P1=FCI(1, EPS1, DAM1)
WRITE(5, 71) P1, EPS1, DAM1
71 FORMAT(/5X, 'P1=', F12.7, 'EPS1=', F12.7, 'DAM1=', F12.7)
2 IF(ABS(P1)-DE) 15, 15, 3
3 IF(P1) 5, 15, 4
4 EPS2=EPS1+DELEP
GC TO 6
5 EPS2=EPS1-DELEP
6 IF(EPS2) 37, 37, 38
37 EPS2=C.00001
38 P2=FCI(1, EPS2, DAM1)
WRITE(5, 72) P2, EPS2, DAM1
72 FORMAT(/5X, 'P2=', F12.7, 'EPS2=', F12.7, 'DAM1=', F12.7)
7 IF(ABS(P2)-DE) 16, 16, 7
7 IF(SIGN(1., P1)+SIGN(1., P2)) 8, 9, 8
8 DELEP=DELEP+DELP
GC TO 3
9 EPSM=(EPS1+P2-EPS2+P1)/(P2-P1)
PM=FCI(1, EPSM, DAM1)
EPS3=EPSM
WRITE(5, 73) PM, EPS3, DAM1
73 FORMAT(/5X, 'PM=', F12.7, 'EPS3=', F12.7, 'DAM1=', F12.7)
7 IF(ABS(PM)-DE) 17, 17, 10
10 IF(SIGN(1., P1)+SIGN(1., PM)) 11, 12, 11
11 EPS1=EPSM
P1=PM
GC TO 13
12 EPS2=EPSM
P2=PM
13 IF(ABS(EPS1-EPS2)-DP) 17, 17, 14

```

```

00305000 C 01F:002F:0
00306000 C 020:0000:0
00307000 C 020:0000:0
00308000 C 020:0000:0
00309000 C 020:0000:0
00310000 C 020:0002:3
00311000 C 020:0004:0
00312000 C 020:0006:3
00313000 C 020:0008:3
00314000 C 020:0009:2
00315000 C 020:000A:1
00316000 C 020:0000:0
00317000 C 020:0010:5
00318000 C 020:0010:5
00319000 C 020:0011:4
00320000 C 020:0014:0
00321000 C 020:0010:2
00322000 C 020:0010:2
00323000 C 020:001F:0
00324000 C 020:0021:2
00325000 C 020:0022:4
00326000 C 020:0023:1
00327000 C 020:0024:3
00328000 C 020:0025:4
00329000 C 020:0027:3
00330000 C 020:0029:5
00331000 C 020:0033:2
00332000 C 020:0033:2
00333000 C 020:0035:0
00334000 C 020:0038:1
00335000 C 020:0039:3
00336000 C 020:003A:0
00337000 C 020:0030:2
00338000 C 020:003F:4
00339000 C 020:0040:3
00340000 C 020:004A:2
00341000 C 020:004A:2
00342000 C 020:004C:1
00343000 C 020:004F:1
00344000 C 020:0050:0
00345000 C 020:0050:5
00346000 C 020:0051:2
00347000 C 020:0052:1

```

```

14 GC TO 9
15 EPS=EPS1
GC TO 180
16 EPS=EPS2
GC TO 180
17 EPS=EPSM
180 EPS=EPS
GC TO 18
18 Q1=FCI(2,EPSC,DAM1)
WRITE(5,74) Q1,EPSC,DAM1
74 FORMAT(5X,'Q1=',F12.7,'EPSC=',F12.7,'DAM1=',F12.7)
IF(ABS(Q1)-DF)31,31,19
19 IF(Q1)20,31,21
20 DAM2=DAM1+DELDA
GC TO 22
21 DAM2=DAM1-DELDA
22 Q2=FCI(2,EPSC,DAM2)
WRITE(5,75) Q2,EPSC,DAM2
75 FORMAT(5X,'Q2=',F12.7,'EPSC=',F12.7,'DAM2=',F12.7)
IF(ABS(Q2)-DF)32,32,23
23 IF(SIGN(1.,Q1)+SIGN(1.,Q2))24,25,24
24 DELCA=DELCA+DELO
GC TO 19
25 DAMM=(DAM1+Q2-DAM2+Q1)/(Q2-Q1)
QM=FCI(2,EPSC,DAMM)
WRITE(5,76) QM,EPSC,DAMM
76 FORMAT(5X,'QM=',F12.7,'EPSC=',F12.7,'DAM=',F12.7)
IF(ABS(QM)-DF)33,33,26
26 IF(SIGN(1.,Q1)+SIGN(1.,QM))27,28,27
27 DAM1=DAMM
Q1=QM
GC TO 29
28 DAM2=DAMM
Q2=QM
29 IF(ABS(DAM1-DAM2)-DP)33,33,30
30 GC TO 25
31 DAM3=DAM1
GC TO 34
32 DAM3=DAM2
GC TO 34
33 DAM3=DAMM
34 IF(ABS(DAM1-DAM3)-0.00001)36,36,35
35 DAM=DAM3
EPS=EPSC
GC TO 1
36 DAM=DAM3
EPS=EPSC
RETURN
END

```

```

00349000 C 00000000:1
00350000 C 00000000:4
00351000 C 00000000:3
00352000 C 00000000:0
00353000 C 00000000:5
00354000 C 00000000:2
00355000 C 00000000:1
00356000 C 00000000:3
00357000 C 00000000:3
00358000 C 00000000:0
00359000 C 00000000:2
00360000 C 00000000:2
00361000 C 00000000:0
00362000 C 00000000:2
00363000 C 00000000:4
00364000 C 00000000:1
00365000 C 00000000:3
00366000 C 00000000:0
00367000 C 00000000:0
00368000 C 00000000:2
00369000 C 00000000:2
00370000 C 00000000:1
00371000 C 00000000:3
00372000 C 00000000:0
00373000 C 00000000:2
00374000 C 00000000:5
00375000 C 00000000:2
00376000 C 00000000:2
00377000 C 00000000:0
00378000 C 00000000:1
00379000 C 00000000:0
00380000 C 00000000:5
00381000 C 00000000:2
00382000 C 00000000:1
00383000 C 00000000:0
00384000 C 00000000:1
00385000 C 00000000:4
00386000 C 00000000:3
00387000 C 00000000:0
00388000 C 00000000:5
00389000 C 00000000:2
00390000 C 00000000:1
00391000 C 00000000:4
00392000 C 00000000:3
00393000 C 00000000:2
00394000 C 00000000:5
00395000 C 00000000:4
00396000 C 00000000:3
00397000 C 00000000:0

```

```

C***** START OF SUBROUTINE AUXFCN *****
SUBROUTINE AUXFCN(S,F,K)
DOUBLE PRECISION S(2),F
COMMON C1,C2,A1,A2,A3,EN,EK,ZT,H3M,GAM,AKM,DZCM,I
EPS=S(1)
DAM=S(2)
EPSX=EPS
DAMX=DAM
IF(K-1)1,1,2
1 F=FCI(1,EPSX,DAMX)
GC TO 3
2 F=FCI(2,EPSX,DAMX)
GC TO 3
3 CONTINUE
RETURN
END

```

```

00398000 C 022:0000:0
00399000 C 022:0000:0
00400000 C 022:0000:0
00401000 C 022:0000:0
00402000 C 022:0000:0
00403000 C 022:0001:0
00404000 C 022:0003:0
00405000 C 022:0003:5
00406000 C 022:0004:4
00407000 C 022:0005:5
00408000 C 022:0006:2
00409000 C 022:0008:5
00410000 C 022:000B:3
00411000 C 022:000C:0
00412000 C 022:000C:0
00413000 C 022:000C:3

```

```

C***** START OF SUBROUTINE NLSYS1 *****
C 1. LAST MODIFIED BEFORE 2/15/73
SUBROUTINE NLSYS1 (N,X,NUMSIG,MAXIT,IPRINT)
DOUBLE PRECISION X(30),PART(30),TEMP(30),COE(30,31),RELCON,
* F,FACTOR,HOLD,H,FPLUS,DERMAX,TEST
DOUBLE PRECISION DEXP,DSIN,CABS
DIMENSION ISUB(30),LOOKUP(30,30)
RELCON=10.0*(-NUMSIG)
JTEST=1
IF(IPRINT.EQ.1) WRITE(5,48)
48 FORMAT(1H1)
DO 700 M=1,MAXIT
M1=M-1
IF(IPRINT.NE.1) GO TO 9
WRITE(5,49)M1,(X(I),I=1,N)
49 FORMAT(15,4D29.16/(D31.16,3D28.16))
9 DO 10 J=1,N
10 LOOKUP(1,J)=J
ARRAY LOOKUP PERMITS A PARTIAL PIVOTING EFFECT WITHOUT
HAVING TO PHYSICALLY INTERCHANGE ROWS OR COLUMNS
DO 500 K=1,N
IF(K-1)134,134,131
131 KMIN=N-1
CALL EACK (KMIN,N,X,ISUB,COE,LOOKUP)
SET UP PARTIAL DERIVATIVES OF KTH FUNCTIONS..
134 CALL AUXFCN(X,F,K)
FACTOR=.0010+00
135 ITALLY=0
DO 200 I=K,N
ITEMP=LOOKUP(K,I)
HOLD=X(ITEMP)
H=FACTOR*HOLD
IF(H.EQ.0.000) H=.0010+00
X(ITEMP)=HOLD+H
IF(K-1)161,161,151
151 CALL EACK (KMIN,N,X,ISUB,COE,LOOKUP)
161 CALL AUXFCN(X,FPLUS,K)
PART(ITEMP)=(FPLUS-F)/H
X(ITEMP)=HOLD
IF(DABS(PART(ITEMP)).EQ.0.000) GO TO 199
IF(DABS(F/PART(ITEMP)).LT.1.00+10) GO TO 200
199 ITALLY=ITALLY+1
200 CONTINUE

```

```

00414000 C 022:0014:0
00415000 C 022:0014:0
00416000 C 023:0000:0
00417000 C 023:0000:0
00418000 C 023:0000:0
00419000 C 023:0000:0
00420000 C 023:0000:0
00421000 C 023:0002:1
00422000 C 023:0003:1
00423000 C 023:0008:2
00424000 C 023:0008:2
00425000 C 023:0009:0
00426000 C 023:000A:0
00427000 C 023:000B:3
00428000 C 023:0019:2
00429000 C 023:0019:2
00430000 C 023:001E:3
00431000 C 023:001E:3
00432000 C 023:001E:3
00433000 C 023:0021:1
00434000 C 023:0022:0
00435000 C 023:0027:0
00436000 C 023:0027:0
00437000 C 023:0027:0
00438000 C 023:0029:4
00439000 C 023:002D:5
00440000 C 023:002E:3
00441000 C 023:002E:3
00442000 C 023:002E:3
00443000 C 023:0034:2
00444000 C 023:0035:4
00445000 C 023:003A:5
00446000 C 023:003D:3
00447000 C 023:003D:3
00448000 C 023:003D:3
00449000 C 023:0043:1
00450000 C 023:0045:5
00451000 C 023:0048:3
00452000 C 023:004A:4
00453000 C 023:004A:4
00454000 C 023:0050:0
00455000 C 023:0050:0
00456000 C 023:0052:1

```

```

100 IF (CITALLY,LE,N-K) GO TO 202
101 FACTOR=FACTOR+10.00+00
102 IF (FACTOR.GT.1500) GO TO 775
103 GO TO 135
202 IF (K.LT,N) GO TO 203
104 IF (CAES(PART(ITEMP)).EQ.0.000) GO TO 775
105 COE (K,N+1)=0.00+00
106 KMAX=ITEMP
107 GO TO 499
108 FIND PARTIAL DERIVATIVE OF LARGEST ABSOLUTE VALUE
203 KMAX=LOOKUP(K,K)
109 DERMAT=DABS(PART(KMAX))
110 KPLUS=K+1
111 DO 210 I=KPLUS,N
112 JSUB=LOOKUP(K,I)
113 TEST=EABS(PART(JSUB))
114 IF (TEST.LT.DERMAT) GO TO 209
115 DERMAT=TEST
116 LOOKUP(KPLUS,I)=KMAX
117 KMAX=JSUB
118 GO TO 210
209 LOOKUP(KPLUS,I)=JSUB
210 CONTINUE
119 IF (DABS(PART(KMAX)).EQ.0.000) GO TO 775
120 SET UP COEFFICIENTS FOR KTH ROW OF TRIANG. LINEAR SYSTEM
121 USED TO BACK - SOLVE FOR THE FIRST KX(I) VALUES ...
122 ISUB(K)=KMAX
123 COE(K,N+1)=0.00+00
124 DO 220 J=KPLUS,N
125 JSUB=LOOKUP(KPLUS,J)
126 COE(K,JSUB)=-PART(JSUB)/PART(KMAX)
127 COE(K,N+1)=COE(K,N+1)+PART(JSUB)*X(JSUB)
220 CONTINUE
499 COE(K,N+1)=(COE(K,N+1)-F)/PART(KMAX)+X(KMAX)
500 CONTINUE
128 EACH SUBSTITUTED TO OBTAIN NEXT APPROXIMATION TO X ..
129 X(KMAX)=COE(N,N+1)
130 IF (N.EQ.1) GO TO 610
131 CALL EACH(N-1,N,X,ISUB,COE,LOOKUP)
610 IF (N-1)650,650,625
132 TEST FOR CONVERGENCE ..
625 DO 630 I=1,N
133 IF (X(I).NE.0.000) GO TO 627
134 IF (CAES(TEMP(I)-X(I)).LT.RELCON) GO TO 630
135 GO TO 649
627 IF (CAES(TEMP(I)-X(I))/X(I))-RELCON) 630,630,649
630 CONTINUE
136 JTEST=JTEST+1
137 IF (JTEST-3)650,725,725
649 JTEST=1
650 DO 660 I=1,N
660 TEMP(I)=X(I)
700 CONTINUE
138 IF (IPRINT.EQ.1) WRITE(5,1753)
1753. FORMAT('NO CONVERGENCE, MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS USED')
725 IF (IPRINT.NE.1) GO TO 300
139 DO 750 K=1,N
140 CALL AUXFCN(X,PART(K),K)
750 CONTINUE
141 WRITE(5,751) (PART(K),K=1,N)
751. FORMAT('FUNCTION VALUES EVALUATED AT FINAL APPROXIMATION FOLLOW')
142 * '// (039.16,2040.16)
143 GO TO 800
775. WRITE(5,752)
752. FORMAT(20X, 'MODIFIED JACOBIAN IS SINGULAR. TRY A DIFFERENT')
144 * INITIAL APPROXIMATION, Z')
300 MAXIT=MI+1
145 RETURN
146 END

```

[illegible]


```

RECF=0.55
SAF=0.80
CFCV=1.40
VPAC=0.2
TETA=1.0
PR=0.72
CK12=(CPCV-1.)/2.
RK12=FECF*CK12
FRKM=RK12*VPAC**2
A=1.+FRKM*(1.-TETA)
B=FRKM*TETA
C=-FRKM
C ***** CORRECAO DELTA 2 / (DELTA 2)U E GA
VN=((1.18-1.08*TETA)-1.)*VMAC
V=VMAC*((1.18-1.08*TETA)-1.)/(0.0144*(2.-H3(1))*(2.-TETA)**
1 (0.8))
PSI=1.+(VN/VM)
FI=1./(1.+FRKM*(H3(1)*PSI)*(2.-H3(1)*PSI))
GA(1)=GA(1)*FI**2
DZD(1)=SORT(GA(1)/DAM)
H3(1)=H3(1)*PSI
WRITE(5,446)
446 FORMAT(3X,'*****')
444 FORMAT(4X,'VELOCITY AND TEMPERATURE BOUNDARY-LAYERS')
WRITE(5,445)
445 FORMAT(3X,'*****')
52 WRITE(5,52)
FORMAT(4X,'EN',8X,'EK',8X,'R',9X,'SI')
WRITE(5,1) EN,EK,R,SI
1 FORMAT(4(F8.3,2X))
WRITE(5,987) VMAC,A,B,C,VXX,TETA
987 FORMAT(4X,'VMAC=',F7.3,3X,'A=',F7.3,3X,'B=',F7.3,3X,'C=',
*F7.3,3X,'VAX=',F7.3,3X,'TETA=',F7.3)
WRITE(5,788) VN,VM,PSI,FI,H3(1),GA(1),DZD(1)
788 FORMAT(4X,'VN=',F7.4,3X,'VM=',F7.4,3X,'PSI=',F7.4,3X,'FI=',F7.4,
1 3X,'H3(1)=',F7.4,3X,'GA(1)=',F7.4,3X,'DZD(1)=',F7.4)
WRITE(5,92)
C PROCESSO DE INTERACAO
DELX=C*0.001
C *****
DC 2 I=1,800
6 X(I+1)=X(I)+DELX
X1=X(I+1)
X1=X(I)
C VELOCIDADE NA EXTREMIDADE DA C.L.
U(I+1)=X1-C1*X1**3-C2*X1**5
UL=U(I)/U(I+1)
UL=U(I)
IF(I-100)7,13,13
13 IF(UU-1.0318,7,4
4 DELX=5.0*DELX
GO TO 6
8 IF(C.97-UU)7,7,5
5 DELX=C.5*DELX
GO TO 6
7 UL=1.-C3*X1**2-C4*X1**4
C TEMPERATURA NA EXTREMIDADE DA C.L.
CF=1.C3
CR=287
TABS=273
TALT=-44
TINF=TABS+TALT
VSON=SORT(CPCV*CR*TINF)
VINF=VMAC*VSON
TSAT=TINF*(1.+CK12*VMAC**2)
TR=TINF*(1.+RK12*VMAC**2)
TSAT=TSAT/TINF
TR=TR/TINF
CMAC=CK12*VMAC**2
T(I+1)=CMAC*U(I+1)**2
T(1)=T(I+1)
TT=T(I)/T(I+1)
TC=T(I+1)
DELT=4C./TINF
TETA=DELT/(TR-TD)
A=1.+FRKM*(1.-TETA)
B=FRKM*TETA
C=-FRKM
IF(I-2) 471,472,473
471 VXX=0.00050
EPS=7.3720
DAM=35.7220
GO TO 477
472 VAX=-0.00000
EPS=7.3250
DAM=35.5224
GO TO 477

```

```

00591000
00592000
00593000
00594000
00595000
00596000
00597000
00598000
00599000
00600000
00601000
00602000
00603000
00604000
00605000
00606000
00607000
00608000
00609000
00610000
00611000
00612000
00613000
00614000
00615000
00616000
00617000
00618000
00619000
00620000
00621000
00622000
00623000
00624000
00625000
00626000
00627000
00628000
00629000
00630000
00631000
00632000
00633000
00634000
00635000
00636000
00637000
00638000
00639000
00640000
00641000
00642000
00643000
00644000
00645000
00646000
00647000
00648000
00649000
00650000
00651000
00652000
00653000
00654000
00655000
00656000
00657000
00658000
00659000
00660000
00661000
00662000
00663000
00664000
00665000
00666000
00667000
00668000
00669000
00670000
00671000
00672000
00673000
00674000
00675000
00676000
00677000

```

```

473 IF(I-3) 474,475,476
474 GO TO 477
475 VMX=-0.00005
EPS=7.3494
DAM=35.6724
GC TO 477
476 GC TO 477
477 CONTINUE
C *****
DELKX=0.00005
K=0
DC 3 K=1,100
TETA=TETA
RMX=VMX
C COEFICIENTES AJ,AE,BJ,BE
AJ=UU*(4.*EN)
AE=UU*(3.*EN+1.)
XI=X(I)
XS=X(I+1)
CALL GATR(XI,XS,0.001,50,FC1,Y,IER,AUX)
BJ=Y/U(I+1)*(4.*EN)
CALL GATR(XI,XS,0.001,50,FC2,Y,IER,AUX)
BE=Y/U(I+1)*(3.*EN+1.)
C INTERACAO
H3(I+1)=H3(I)
AK(I+1)=AK(I)
GA(I+1)=GA(I)
D2D(I+1)=D2D(I)
H3J(I)=H3(I+1)
AKJ(I)=AK(I+1)
GAJ(I)=GA(I+1)
D2DJ(I)=D2D(I+1)
C MEDIA DOS PARAMETROS DE FORMA E SUCCAO PERFIL DE VELOCIDADE
C *****
DC 5 J=1,10
H3M=(H3J(J)+H3(I))/2
AKM=(AKJ(J)+AK(I))/2
GAM=(GAJ(J)+GA(I))/2
D2DM=SQRT((D2DJ(J)**2+D2D(I)**2)/2.)
C CALCULO DOS VALORES DE EPS E DAM
NUMSIG=6
IPRINT=2
MAXIT=100
S(1)=EPS
S(2)=DAM
IF(I-800) 83,83,84
83 CALL CRIS(DAM,EPS)
GC TO 85
84 CALL NLSYS1(2,S,NUMSIG,MAXIT,IPRINT)
EPS=S(1)
DAM=S(2)
85 CONTINUE
C DISPLACEMENT,MOMENTUM,ENERGY AND DENSITY LOSS THICKNESS
D10=FGI(3,EPS,DAM)
F1=D10
F1=FOI(1,EPS,DAM)
F2=FOI(2,EPS,DAM)
CALL FIP(C.,1.,FC0,Y)
FC=Y
IF(I-500) 80,80,81
80 D2D(I+1)=D10-F1+F2
D2DC=D2D(I+1)
GC TO 82
81 D2CC=D2DM
82 CONTINUE
C OUTROS PARAMETROS
ALFA=D200*EPS
H12=D10/D200
CALL FIP(C.,1.,FC12,Y)
F4=Y
H43=F4/(2*F3-3*F1+F2+2*F0)
T1=0.
TS=1.
CALL GATR(T1,TS,0.001,50,FC3,Y,IER,AUX)
BETA=D200*EN
C COEFICIENTES FJ E FE
FJ=(EN+1.)*ALFA*EN-(EN+1.)*H12-(EN+1.)*VMAC*2-EN*(EN+1.)*GAM
1 ALFA*(EN-1.)*ALFA*AKM/(1.-EN**2)-(EN+1.)*(1.-EN)*AK4
FE=2.*(EN+1.)*ALFA*EN+BETA*EN*H3M*(ALFA*EN-(H12+(2./EN)*H43-
1 (EN+1.)/EN)*VMAC*2)*(EN+1.)*ALFA*(EN-1.)*ALFA*AKM/
2 (1.-EN**2)-AKM*(EN+1.)*H3M+1.-EN**2)
C EQUACoes DO MOMENTUM E DA ENERGIA MECANICA
ZJ(I+1)=ZJ(I)+AJ+FJ*BJ
ZE(I+1)=ZE(I)+AE+FE*BE
C ***** CALCULO DOS VALORES MEIOIS DA EQLACAO DA ENERGIA *****
H12(I+1)=H12(I)
H12J(I)=H12(I+1)

```

```

006790000 C 025:00F2:4
006800000 C 025:00F3:4
006810000 C 025:00F4:4
006820000 C 025:00F5:4
006830000 C 025:00F6:1
006840000 C 025:00F7:4
006850000 C 025:00F8:4
006860000 C 025:00FA:3
006870000 C 025:00FB:3
006880000 C 025:00FC:3
006890000 C 025:00FD:0
006900000 C 025:00FD:3
006910000 C 025:00FD:3
006920000 C 025:00FD:3
006930000 C 025:00FF:3
006940000 C 025:0100:1
006950000 C 025:0101:0
006960000 C 025:0103:1
006970000 C 025:0103:1
006980000 C 025:0106:1
006990000 C 025:0109:1
007000000 C 025:0108:5
007010000 C 025:0100:2
007020000 C 025:0113:4
007030000 C 025:0117:5
007040000 C 025:0118:4
007050000 C 025:0122:1
007060000 C 025:0124:5
007070000 C 025:0127:3
007080000 C 025:012A:1
007090000 C 025:012C:5
007100000 C 025:012E:4
007110000 C 025:0130:3
007120000 C 025:0132:2
007130000 C 025:0134:1
007140000 C 025:0134:1
007150000 C 025:0135:0
007160000 C 025:0139:0
007170000 C 025:013D:0
007180000 C 025:0140:2
007190000 C 025:0146:2
007200000 C 025:0147:1
007210000 C 025:0148:0
007220000 C 025:0148:5
007230000 C 025:014A:1
007240000 C 025:0149:3
007250000 C 025:0140:2
007260000 C 025:014F:0
007270000 C 025:0152:4
007280000 C 025:0153:5
007290000 C 025:0155:0
007300000 C 025:0155:0
007310000 C 025:0157:3
007320000 C 025:0159:0
007330000 C 025:015A:2
007340000 C 025:015E:5
007350000 C 025:015F:4
007360000 C 025:0161:3
007370000 C 025:0164:1
007380000 C 025:0164:4
007390000 C 025:0165:1
007400000 C 025:0166:2
007410000 C 025:0166:2
007420000 C 025:0167:4
007430000 C 025:0169:0
007440000 C 025:0169:0
007450000 C 025:016B:5
007460000 C 025:016F:5
007470000 C 025:0170:3
007480000 C 025:0171:1
007490000 C 025:0176:4
007500000 C 025:0179:4
007510000 C 025:0179:4
007520000 C 025:0181:5
007530000 C 025:018C:0
007540000 C 025:0195:3
007550000 C 025:019D:5
007560000 C 025:01A5:3
007570000 C 025:01A5:3
007580000 C 025:01A9:4
007590000 C 025:01AD:5
007600000 C 025:01AF:5
007610000 C 025:01E2:3
007620000 C
007630000 C
007640000 C
007650000 C

```



```

H+12M=(HH12J(J)+HH12(I))/2.
ZJM=(ZJ(I)+ZJ(I+1))/2.
AKZ(I)=(ALFA-AKM)/ZJM
AKZ(I+1)=AKZ(I)
AKZJ(I)=AKZ(I+1)
AKZM=(AKZJ(J)+AKZ(I))/2.
AF(I)=ALFA/PR
AF(I+1)=AP(I)
APJ(I)=AP(I+1)
AFM=(APJ(J)+AP(I))/2.
CCEFFICIENTES AH,BH
IF(UU)163,163,164
163 UL=0.5
GC TO 175
164 UL=UU
GC TO 175
175 CCNTINUE
AF(I+1)=(UU)**(-(1.+HH12M))*TT*EXP((AKZM)*(X(I)-X(I+1)))
C **** (ALCULO DE BH ****
TI=X(I)
TS=X(I+1)
CALL FIP(TI,TS,FCE,Y)
QF=U(I+1)**(1.+HH12M)
QR=EXP(AKZM*X(I+1))
QR=QR+T(I+1)
BF(I+1)=Y*(QP/QR)
CCEFFICIENTE FH
FHM=(1./ZJM)*(APM*(FRKM*TETA+RXX)+AKM*((1.-TETA)*RECF-1.)*CK12+
1 VMAC**2))
C EQUACGES DA ENERGIA : EQUACAO BASICA E EQUACAO DE COMPARACAO
H3(I+1)=ZE(I+1)/ZJ(I+1)
IF(I-1)1000,1000,1001
1000 EC(I)=-RXX*(H3(I)-1.)
GC TO 431
1001 TETA=TETA
431 EE(I)=EC(I)
EC(I+1)=(CK12+VMAC**2)*(H3(I+1)-RECF*(H3(I+1)-TETA))-
1 RXX*(H3(I+1)-1.)
EE(I+1)=EE(I)+AH(I+1)+FHM*BH(I+1)
DEQ=(EC(I+1)-EE(I+1))
PARAMETROS DE FORMA E DE SUCCAO
RC2(I+1)=((ZJ(I+1)/R)**EN*U(I+1)**(2.-EN))**((1./(1.+EN))
H3(I+1)=ZE(I+1)/ZJ(I+1)
AK(I+1)=(RC2(I+1)**(1.-2.*EN)*SI*(ZJ(I+1)/R)**EN)
1 **((1./((2.-EN)))
AL(I+1)=0.0
GA(I+1)=(ALFA**((1.-EN)/EN))*((1.-EK**2)+ZJ(I+1)
1 *DU/U(I+1)+ALFA*AK(I+1))
D2D(I+1)=D1C-F1+FO
T(I+1)=11.77*X(I+1)
DAN(I+1)=DAP
EFZ(I+1)=EPS
ALF(I+1)=ALFA
BET(I+1)=BETA
H21(I+1)=H12
H34(I+1)=H43
CL1(I+1)=C1C
FA(I+1)=FJ
FE(I+1)=FE
FH(I+1)=FHM
TEP(I+1)=TETA
REK(I+1)=RXX
BE(I+1)=B
CET=(TSAT-T(I+1))*((1./((CPCV-1.))-W)
CAW=(1./A**W)
RC2(I+1)=RC2(I+1)*(CET*CAW)**((1./(1.+EN))
AK(I+1)=AK(I+1)*(CET*CAW)**((1./(2.-EN))
RC2(I)=0.
D2(I)=0.
CF(I)=1.
CL(I)=1.
TC(I)=1.
Q(I)=1.
L=I+1
M=I+1
D2(M)=(RD2(L)*U(L)**(EN-2.))*((1./EN)
CF(M)=2.*ALF(L)**EN/RD2(L)
CC(M)=(EK*ALF(L)**EN+BET(L))/RD2(L)
Q2(M)=D2(M)/(CET*CAW)
TL(M)=ALF(L)**EN*U(L)**2/RD2(L)
TC(M)=TD(M)*(TSAT-T(I+1))*((1./((CPCV-1.)))
D(M)=-((RECF/2.)*ALF(L)/SAF*TEP(L)*(1.+REK(L)/EE(L))
RNU(M)=Q(M)/DELT.D.C2)
C VERIFICACAO DE CONVERGENCIA
H3C=H3M-H3(I+1)
WRITE(S,889) H3C
989 FORMAT(5X,'H3C=',F7.4)
IF(ABS(H3M-H3(I+1))-0.05) 19,19,14

```

```

007650000 C 025:01E8:2
007670000 C 025:01E8:3
007680000 C 025:01E8:4
007690000 C 025:01E8:5
007700000 C 025:01E8:6
007710000 C 025:01E8:7
007720000 C 025:01E8:8
007730000 C 025:01E8:9
007740000 C 025:01E8:A
007750000 C 025:01E8:B
007760000 C 025:01E8:C
007770000 C 025:01E8:D
007780000 C 025:01E8:E
007790000 C 025:01E8:F
007800000 C 025:01E8:10
007810000 C 025:01E8:11
007820000 C 025:01E8:12
007830000 C 025:01E8:13
007840000 C 025:01E8:14
007850000 C 025:01E8:15
007860000 C 025:01E8:16
007870000 C 025:01E8:17
007880000 C 025:01E8:18
007890000 C 025:01E8:19
007900000 C 025:01E8:20
007910000 C 025:01E8:21
007920000 C 025:01E8:22
007930000 C 025:01E8:23
007940000 C 025:01E8:24
007950000 C 025:01E8:25
007960000 C 025:01E8:26
007970000 C 025:01E8:27
007980000 C 025:01E8:28
007990000 C 025:01E8:29
008000000 C 025:01E8:30
008010000 C 025:01E8:31
008020000 C 025:01E8:32
008030000 C 025:01E8:33
008040000 C 025:01E8:34
008050000 C 025:01E8:35
008060000 C 025:01E8:36
008070000 C 025:01E8:37
008080000 C 025:01E8:38
008090000 C 025:01E8:39
008100000 C 025:01E8:40
008110000 C 025:01E8:41
008120000 C 025:01E8:42
008130000 C 025:01E8:43
008140000 C 025:01E8:44
008150000 C 025:01E8:45
008160000 C 025:01E8:46
008170000 C 025:01E8:47
008180000 C 025:01E8:48
008190000 C 025:01E8:49
008200000 C 025:01E8:50
008210000 C 025:01E8:51
008220000 C 025:01E8:52
008230000 C 025:01E8:53
008240000 C 025:01E8:54
008250000 C 025:01E8:55
008260000 C 025:01E8:56
008270000 C 025:01E8:57
008280000 C 025:01E8:58
008290000 C 025:01E8:59
008300000 C 025:01E8:60
008310000 C 025:01E8:61
008320000 C 025:01E8:62
008330000 C 025:01E8:63
008340000 C 025:01E8:64
008350000 C 025:01E8:65
008360000 C 025:01E8:66
008370000 C 025:01E8:67
008380000 C 025:01E8:68
008390000 C 025:01E8:69
008400000 C 025:01E8:70
008410000 C 025:01E8:71
008420000 C 025:01E8:72
008430000 C 025:01E8:73
008440000 C 025:01E8:74
008450000 C 025:01E8:75
008460000 C 025:01E8:76
008470000 C 025:01E8:77
008480000 C 025:01E8:78
008490000 C 025:01E8:79
008500000 C 025:01E8:80
008510000 C 025:01E8:81
008520000 C 025:01E8:82
008530000 C 025:01E8:83

```

```

14 H3J(J+1)=H3(I+1)
   AKJ(J+1)=AK(I+1)
   GAJ(J+1)=GA(I+1)
   D2CJ(J+1)=D2C(I+1)
   HH12J(J+1)=HH12(I+1)
   AKZJ(J+1)=AKZ(I+1)
   APJ(J+1)=AP(I+1)
9  CONTINUE
C *****
C VERIFICACAO DE RKX
19 IF(TETA-1.)20,12,20
20 IF(ABS(EC(I+1)-EB(I+1))-0.001)12,12,21
21 IF(EC(I+1)-EB(I+1))22,12,23
22 VXX=VXX-DELKX
777 WRITE(5,778) VXX,EB(I+1),EC(I+1),DEQ
778 FORMAT(1X,'VXX=',F10.7,3X,'EB(I+1)=',F12.7,1X,'EC(I+1)=',F12.7,
11X,'DEQ=',F12.7)
   GC TO 3
23 VXX=VXX+DELKX
   GC TO 777
3  CONTINUE
C *****
12 IF(I-700) 31,30,30
31 H3(I)=H3(I+1)
   AK(I)=AK(I+1)
   GA(I)=GA(I+1)
   D2C(I)=D2C(I+1)
   N=I+1
   IF(I-10)32,33,34
34 IF(I-24)32,35,36
36 IF(I-49)32,37,38
38 IF(I-99)32,39,40
40 IF(I-149)32,41,42
42 IF(I-199)32,43,44
44 IF(I-274)32,41,46
46 IF(I-324)32,39,48
48 IF(I-375)32,37,47
47 IF(I-425)32,35,49
49 IF(I-485)32,33,45
45 IF(I-550)32,35,70
70 IF(I-650) 32,37,32
32 GC TO 888
33 DELX=C.001
   GC TO 888
35 DELX=C.003
   GC TO 888
37 DELX=C.005
   GC TO 888
39 DELX=C.01
   GC TO 888
41 DELX=C.02
   GC TO 888
43 DELX=C.03
   GC TO 888
   GC TO 2
488 WRITE(5,911)(X(N),TET(N),U(N),T(N),EPZ(N),CAN(N),ALF(N),TD(N),
1  CC(N),CF(N),G(N),RNU(N),EC(N),EB(N),REK(N),TEP(N))
2  CONTINUE
   NA=I-10
30  MM=I+1
   M=0
   LL=5
   DO 60 L=2,MM,LL
   M=M+1
   X2(M)=X(L)
   U2(M)=U(L)
   TE(M)=TET(L)
   RL2(M)=RD2(L)
   D2(M)=D2(L)
   CF(M)=CF(L)
   CC(M)=CD(L)
   TC(M)=TO(L)
   D2D(M)=D2D(L)
   GA(M)=GA(L)
   AK(M)=AK(L)
   DE1(M)=DD1(L)
   T(M)=T(L)
   Q(M)=Q(L)
   RNU(M)=RNU(L)
60  CONTINUE
   WRITE(5,92)
   WRITE(5,911)(X(N),TET(N),U(N),T(N),EPZ(N),CAN(N),ALF(N),ZJ(N),
1  ZE(N),AH(N),BH(N),FHC(N),EC(N),EB(N),REK(N),TEP(N),N=5,NN,5)
   WRITE(5,94)
   WRITE(5,95)(X2(N),U2(N),D2(N),RD2(N),D2D(N),DE1(N),TD(N),CD(N),
1  CF(N),AK(N),GA(N),T(N),G(N),RNU(N),TE(N),N=1,M)
64  FORMAT(1X,5X,'X',5X,'U',6X,'D2',4X,'RD2',4X,'D2D',4X,'DE1D',7X,
1  'TD',9X,'CD',9X,'CF',9X,'AK',5X,'GA',6X,'T',5X,'CX',9X,'NL',9X,

```

2	*TET'//)	00942000	C	025:03E3:2
65	FORMAT(1X,3F7.4,1F8.4,2F7.4,1F9.4,2F13.4,2F7.4,1F8.4,2F12.4,1F8.4)	00943000	C	025:03E3:2
91	FORMAT(3F8.4,1X,11F8.4,2F9.5)	00944000	C	025:03E3:2
92	FORMAT(/5X,'X',5X,'TET',6X,'U',7X,'T',8X,'EPS',4X,'DAM',5X,	00945000	C	025:03E3:2
1	'ALFA',5X,'TO',6X,'CD',6X,'CF',6X,'GX',7X,'NL',6X,'EC',6X,'EP',	00946000	C	025:03E3:2
2	6X,'KX',5X,'TETA'//)	00947000	C	025:03E3:2
	STOP	00948000	C	025:03E3:2
	END	00949000	C	025:03E4:1

NO ERRORS DETECTED. NUMBER OF CARDS = 949. 15:19 SECONDS PROCESSING.
 COMPILE TIME = 44 SECONDS ELAPSED.
 D2 STACK SIZE = 51 WORDS. FILE SIZE = 140 WORDS. ESTIMATED CORE STORAGE REQUIREMENT = 38042
 TOTAL PROGRAM CODE = 2795 WORDS. ARRAY STORAGE = 34918 WORDS.
 NUMBER OF PROGRAM SEGMENTS = 49. NUMBER OF DISK SEGMENTS = 287.
 PROGRAM CODE FILE = (COM26001) MARCIO, COMPILER COMPILED ON 03/31/76 (FORTRAN ON PACK)